

İSTATİSTİK FİZİK DENEYLERİ

FİZİK LAB. VI

FİZ 302

2021 - 2022

RADYOAKTİF BOZUNMA

Deneyde Kullanılan Araçlar

G-M Tüpü, Sayaç, DC Güç Kaynağı, Dirençler (5 MΩ, 5.6 MΩ, 1 MΩ), Kapasitör (0.01μF), Potansiyometre, Kronometre

GİRİŞ

Birçok çekirdek kararlı değildir ve kendiliğinden radyoaktif bozunma ile bileşimlerini değiştirirler. Nötron ve protonların her bileşimi kararlı çekirdekleri oluşturmaz. Genellikle ağır çekirdeklerde nötronların oranının artmasına karşılık, hafif çekirdekler (kütle numarası < 20) yaklaşık olarak eşit sayıda nötron ve proton içerirler.

KURAMSAL BILGI

Bir çekirdek, kendiliğinden radyoaktif olarak bozunarak bir ${}^2_4\text{He}$ çekirdeği (alfa parçacığı), bir elektron (beta parçacığı) veya bir foton (gama ışını) salarak uyarılmış bir enerji düzeyinden veya bir şekillenimden kurtularak daha kararlı duruma ulaşır.

Herhangi bir radyoaktif maddenin bir numunesinin aktifliği, atom çekirdeklerinin bozunma hızıdır. Eğer bir örnekte belli bir zamandaki çekirdek sayısı N ise, onun aktivitesi;

$$R = \frac{dN}{dt}$$

ile verilir. Burada dN/dt negatif değere sahip olduğundan R'nin pozitif olması için önüne eksi işareti konur. Aktivlik için kullanılan birim, saniyedeki bozunma sayısı olduğundan Curie (C) olarak ifade edilir.

Radyoaktif bozunma olayı istatistiksel bir olaydır. Radyoaktif maddenin bir numunesinin bir çekirdeği belirli bir bozunma olasılığına sahiptir. Ancak, belirli bir zaman aralığı içinde hangi çekirdeklerin bozunacağını önceden bilmenin bir yolu yoktur. Eğer numune yeterli derecede büyük ise; yani çekirdek sayısı çok fazla ise, onun belli bir zaman aralığında bozunma yüzdesi, her bir çekirdeğin bozunma olasılığına çok yakın olacaktır. Zaman aralığı yeterince uzun ise ve sayma oranı yeterince düşükse her bir bozunma sayılabilir.

Radyoaktif element içeren bir kaynak oldukça fazla sayıda kararsız çekirdeğe sahiptir ve bu kararsız çekirdeklerden herhangi birinin belirli bir zaman aralığında bozunma olasılığı oldukça düşüktür.

Binom dağılımı, birbirinden bağımsız N olaydaki olasılığı verir.

$$P(n) = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n q^{N-n}$$

Burada p, bir olayın gerçekleşme olasılığı ve q gerçekleşmeme olasılığıdır. Bu bağıntı ile verilen olasılık dağılımı, $n \ll N$, $p \ll 1$ ise $a=Np$, yani ortalama değerin sabit kaldığı

koşullarda, Poisson dağılımına ulaşır. Çekirdek sayısının fazla, buna karşın bozunma ürünü olan parçacığın çıkma olasılığının küçük olmasından ötürü Poisson dağılımına geçilir. Belirli bir zaman aralığında n tane parçacığın bozunma olasılığı Poisson dağılımı ile verilir.

$$P_a(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}$$

Burada a, belirli bir zaman aralığındaki ortalama sayma sayısıdır. Bu dağılımın standart sapması

$$\sigma^2 = a$$

ile verilir. Deneysel ortalama değer;

$$a = \bar{n} = \frac{\sum nF(n)}{\sum F(n)}$$

ile tanımlanır. $\bar{n}$ değeri çok büyüdüğünde Poisson dağılımı, normal ya da Gauss dağılımına yaklaşır ve

$$P(n) = (2\pi\sigma)^{-1/2} e^{-(n-\bar{n})/2\sigma^2}$$

ifadesi ile verilir. Burada $\sigma = (\bar{n})^{1/2}$ olan standart sapmadır. Genellikle,

$$\sigma^2 = \sum_n (n - \bar{n})^2 P(n)$$

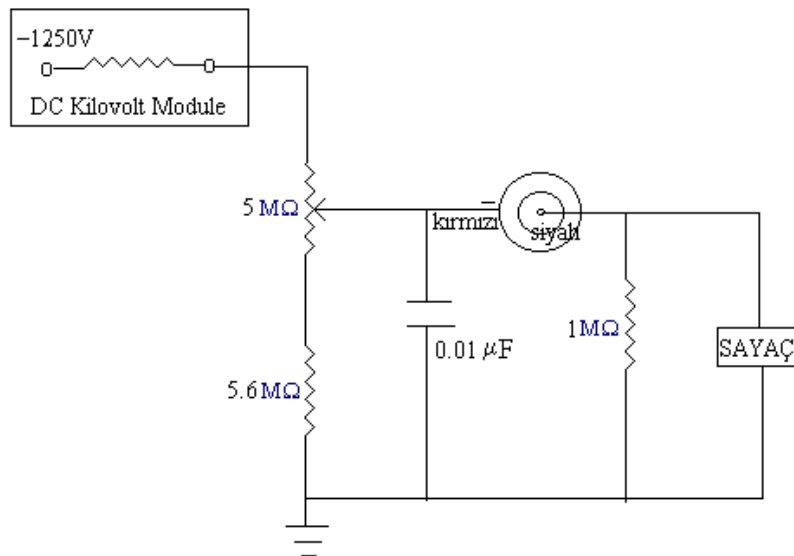
ile tanımlanır. Gauss dağılımı, Poisson dağılımının yaklaşık bir ifadesi olarak kullanıldığında

$$a = \bar{n} = \sigma^2$$

olarak alınır.

DENEY

Deney Düzenegi



Bu deneyde Geiger-Müller tüpü radyoaktif bozunmada detektör olarak kullanılacaktır. Biz, belirli zaman aralıklarındaki bozunma sayısındaki dalgalanmaların ölçümü ile ilgileneceğiz.

Deneyin Yapılışı

1. Şekildeki devreyi kurunuz. $1\ \mu\text{C}$ 'lik ^{60}Co gama kaynağını G-M tüpünün yakınına koyarak tüp gerilimini sayaçta ilk sayım gözleninceye kadar arttırınız. Sayma gözlendikten sonra tüp gerilimini birkaç 50V daha arttırarak G-M tüpünü plato bölgesine getiriniz. ^{60}Co kaynağını, GM tüpünden sayma hızı saniyede 1 atma oluncaya kadar uzaklaştırınız. 10 saniyelik zaman aralığı için 50 (N) sayma yapınız. Belirli zaman aralıklarındaki sayma sayıları (n) için frekansları hesaplayınız. Sayma sayısına karşı frekans değerlerinin histogram grafiğini çiziniz. Deneysel verileri kullanarak $\bar{n}$ değerini ve standart sapmayı hesaplayınız. Poisson dağılımı ifadesini kullanarak teorik olasılık ve ortalama değeri hesaplayarak, deneysel sonuçlarla karşılaştırınız. Dağılımdaki her bir değeri, deneyin tekrarlanma sayısı ile çarparak beklenen frekans değerlerini hesaplayarak deneysel sonuçlarla karşılaştırmak için grafiği, histogram grafiğinin üzerine çiziniz.

2. Zaman aralığını 20 saniyeye çıkararak yukarıdaki işlemleri tekrarlayınız. $\bar{n}$, σ , teorik ve deneysel frekansları hesaplayınız. Histogram ve beklenen (teorik) frekans değerlerinin grafiğini çiziniz. Sonuçları $\Delta t = 10\text{s}$ ile elde edilen verilerle karşılaştırınız.

NOT

$\bar{n}$ değeri giderek arttığında dağılımın $\bar{n}$ etrafında giderek keskinleştiğine dikkat ediniz. Kendi verilerinizle karşılaştırınız.

SORULAR

1. Poisson dağılımındaki a parametresi, verilerinizdeki $\bar{n}$ değerinden hesaplanarak tahmin edilebilir. Bu sonuç ne kadar güvenilirdir? Yani, bu yolla elde edilen ortalama değerin standart sapması ne kadardır?
2. Eğer belirli zaman aralığındaki ortalama sayma $\bar{n}$ ile veriliyorsa, herhangi bir en az $\bar{n}$ bozunmanın gözlenme olasılığı ne olacaktır?
3. Zaman aralığı 10s'den 20s'ye çıkartıldığında Poisson dağılımının hangi dağılıma yaklaştığını söyleyebilirsiniz?

MAXWELL BOLTZMANN HIZ DAĞILIMI

Deneyde Kullanılan Araçlar

Maxwell Boltzmann hız dağılım deney seti, çembersel oluklu sektör, dijital stroboskop, 400 cam bilye, kronometre, güç kaynağı (15 V_{AC}/ 12 V_{DC}/ 5A), bağlantı kabloları.

GİRİŞ

Birbirinden bağımsız parçacıkların oluşturduğu T sıcaklığında bulunan ve ısı deposu ile yalnızca ısı etkileşiminde olan bir sistemin r kuantum durumunda bulunma olasılığını veren dağılıma **kanonik dağılım** denir. Bu dağılıma göre bir sistemi r durumunda, ϵ_r enerjisinde bulma olasılığı

$$P_r \propto e^{-\beta \epsilon_r} \quad (1)$$

dir. Burada $\beta = (kT)^{-1}$ sistemin ısı dengede olduğu ısı deposuna ilişkin mutlak sıcaklık parametresidir.

V hacminde, T sıcaklığında ısı dengede bir ideal gazı göz önüne alalım. Bu gaz moleküllerinin klasik olarak incelenebileceğini varsayalım. Bu gazın yalnızca bir molekülünü göz önüne aldığımızda bu moleküle, geri kalan moleküllerin oluşturduğu T sıcaklığındaki ısı deposu ile ısı dengede olan bir sistem gözüyle bakılabilir. Molekül tek atomlu olsun. Eğer gravitasyon gibi dış kuvvet alanları yok sayılırsa, bu molekülün ϵ ile gösterilen enerjisi yalnızca

$$\epsilon = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (2)$$

kinetik enerjisidir. Burada gazın yeterince seyreltilmiş olduğunu kabul ediyoruz. Bu nedenle diğer moleküllerle etkileşim yok sayılabilir.

Molekülün durumu klasik olarak x,y,z konum koordinatları ve p_x, p_y, p_z momentum koordinatları ile belirlenir.

$$d^3r = dx dy dz \quad (3)$$

ve

$$d^3p = dp_x dp_y dp_z \quad (4)$$

olmak üzere kanonik dağılımdan yararlanarak molekülün $\vec{r}$ ile $\vec{r} + d\vec{r}$ arasında ve $\vec{p}$ ile $\vec{p} + d\vec{p}$ arasında olma olasılığı

$$P(\vec{r}, \vec{p}) d^3r d^3p \propto e^{-\beta(p^2/2m)} d^3r d^3p \quad (5)$$

dir. Aynı bağıntıyı momentum yerine hız cinsinden de yazabiliriz. $\vec{v} = \vec{p}/m$ molekülü $\vec{r}$ ile $\vec{r} + d\vec{r}$ arasında bir yerde ve $\vec{v}$ ile $\vec{v} + d\vec{v}$ aralığında bir hıza sahip olma olasılığı

$$P'(\vec{r}, \vec{v}) d^3r d^3v \propto e^{-(1/2)\beta m v^2} d^3r d^3v \quad (6)$$

dir.

$f(v) d^3v \equiv$ birim hücrede hızları $\vec{v}$ ile $\vec{v} + d\vec{v}$ aralığında yer alan parçacıkların sayısı olmak üzere

$$f(v) d^3v = \frac{NP'(r, v) d^3r d^3v}{d^3r} \quad (7)$$

$$f(v) d^3v = -C e^{-(1/2)\beta m v^2} d^3v \quad (8)$$

P' (ya da f) yalnızca v 'nin büyüklüğüne bağlıdır, doğrultusuna bağlı değildir (niçin?). Eşitlik 8'de tüm olası hızlar üzerinden toplamın birim hücredeki moleküllerin ortalama sayısı olan n 'ye eşit olması gerekir. Bu işlem yapıldığında

$$C = n \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2} \quad (9)$$

olarak bulunur.

KURAMSAL BİLGİ

Maxwell-Boltzmann Parçacıkları

Bu tür parçacıklar birbirinden ayırt edilebilir ve herhangi bir enerji düzeyine ya da durumuna yollanan parçacık sayısında

$$E = \sum_i \varepsilon_i \quad N = \sum_i N_i \quad (10)$$

koşullarına uyulduğu sürece, bir kısıtlama yoktur.

Birim hacimde, hızları $(v \equiv |\vec{v}|)$ v ile $v + dv$ aralığındaki moleküllerin ortalama sayısı $F(v)dv$, bu aralıkta hıza sahip tüm moleküllerin üzerinden doğrultuya bakılmaksızın toplam alınarak bulunur.

$$F(v)dv = \int f(v) d^3v \quad (11)$$

$$v < |\vec{v}| < v + dv$$

Burada d^3v hız uzayında iç yarıçapı v dış yarıçapı $v + dv$ olan bir küresel kabuğa karşı gelir ve $4\pi v^2 dv$ ile verilir. dv sonsuz küçük olduğundan $f(v)$ yalnızca v 'nin büyüklüğüne bağlıdır ve küresel kabuğun her yerinde aynı değeri alır. Böylece Eş. 11

$$F(v)dv = 4\pi f(v) v^2 dv \quad (12)$$

şekline dönüşür. Eşitlik 8’de verilen $f(v)$ tek bir molekül için düzenlenerek Eşitlik 12’de yerine konulduğunda, **bir molekülün hızının büyüklüğünün v ile $v + dv$ aralığında yayılma olasılığı** veren

$$F(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2 / 2kT} v^2 dv \quad (13)$$

bağıntı elde edilir. Bu bağıntıya **Maxwell Boltzmann Hız Dağılım fonksiyonu** denilmektedir. Dağılım fonksiyonu belli bir hız değerinde maksimum bir değere sahip olur ki bu hız değerine **en olası hız** v_{eno} adı verilmektedir. Gerekli türev alma işlemi yapıldığında

$$v_{eno} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (14)$$

olarak bulunur. Eşitlik 13’de v_{eno} kısaltması kullanılırsa, dağılım fonksiyonu

$$F(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_{eno}^3} e^{-v^2 / v_{eno}^2} \quad (15)$$

şekline dönüşür. Bu fonksiyonu sistemdeki toplam parçacık sayısı N ile çarparsak, **hızlarının büyüklüğü v ile $v + dv$ aralığında yayılan moleküllerin sayısını veren dağılım fonksiyonunu** elde ederiz.

$$n(v) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_{eno}^3} e^{-v^2 / v_{eno}^2} \quad (16)$$

Öte yandan molekülün hızının büyüklüğünün ortalaması,

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} F(v)v dv \quad (17)$$

ortalama değer bağıntısından bulunabilir. Burada (13) bağıntısı kullanılırsa,

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-mv^2 / 2kT} v^3 dv = (8kT / \pi m)^{1/2} \quad (18)$$

bulunur. Bu hız çoğu kez molekül hız olarak bilinir. Hızın karesinin ortalaması ise,

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} P(v)v^2 dv = \left[4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \right] \int_0^{\infty} e^{-mv^2 / 2kT} v^4 dv = 3kT / m \quad (19)$$

bulunur. Hızın karesinin ortalamasının karekökü olarak tanımlanan ve kısaca v_{kok} ile gösterilen hız,

$$v_{kok} = (3kT / m)^{1/2} \quad (20)$$

olacaktır.

Deney sisteminde bilyeler eğik atış hareketi yaptıkları için konumları ve hızları arasından şu şekilde bir ilişki vardır:

$$x = vt \quad , \quad h = \frac{1}{2}gt^2 \quad , \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad , \quad x = v\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad , \quad v = x\sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (21)$$

Hız dağılım fonksiyonu bilyelerin konumuna göre yeniden düzenlenirse,

$$n(x) = N4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{g}{2h}\right)^{3/2}x^2e^{-\left(mgx^2/2h\right)/2kT} \quad (22)$$

şekline dönüşür. Bu fonksiyon da belli bir x değerinde maksimum değer alır ki bu konuma **en olası konum** denir. Eşitlik 22 kullanılarak gerekli hesaplama yapıldığında x_{eno} için

$$x_{eno} = \sqrt{\frac{4hkT}{mg}} = v_{eno}\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (23)$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda dağılım fonksiyonu

$$n(x) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \frac{x^2}{x_{eno}^3} e^{-x^2/x_{eno}^2} \quad (24)$$

olarak düzenlenebilir. Deneyde dağılıma katılan bilye sayısı net olarak bilinmediği için dağılım fonksiyonundaki N sayısı belli değildir. Bu nedenle fonksiyonun her deneyde dağılıma katılan efektif bilye sayısına göre yeniden düzenlenmesi gerekmektedir. Bu amaçla, A bir sabit olmak üzere, dağılım fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür.

$$n(x) = A \frac{x^2}{x_{eno}^3} e^{-x^2/x_{eno}^2} \quad (25)$$

DeneySEL olarak bulunan x_{eno} ve $n(x_{eno})$ değerleri kullanılarak A sabiti bulunabilir.

Maxwell-Boltzmann hız dağılımının geçerli olduğu sınırlar

Maxwell hız dağılımına ulaşırken kanonik dağılımı klasik yaklaşım için kullandık ve burada bu klasik tanımın geçerliliği için

$$S_0 P_0 \gg \hbar \text{ yani } S_0 \gg \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{\hbar}{p_0} \quad (26)$$

Burada S_0 ortalama serbest yol, λ_0 De Broglie dalgaboyudur. T sıcaklığında, m kütleli bir gazın p_0 en olası momentumunun büyüklüğü bu molekülün v_{eno} hızından bulunabilir.

$$p_0 \cong mv_{eno} = \sqrt{2mkT} \quad (27)$$

Buna karşı gelen de Broglie dalga boyu

$$\lambda_0 \equiv \frac{\hbar}{p_0} \cong \frac{\hbar}{\sqrt{2mkT}} \quad (28)$$

dir. Klasik tanım molekülleri belirli yörüngelerde hareket eden ayırt edilebilir parçacıklar olarak kabul eder. Bu kabulün geçerli kalması için en yakın iki molekül arasındaki uzaklık S_0

$$S_0 \gg \lambda_0 \quad (29)$$

olmalıdır. Bu koşul sağlanmıyorsa kuantum mekaniksel etkiler işin içine girer, özellikle moleküllerin ayırt edilemez olması önem taşır. En yakın iki molekül arasındaki S_0 uzaklığını yaklaşık olarak belirleyebilmek için her molekülün kenarı S_0 olan bir küpün içinde olduğunu düşünelim. Bu küpler N tane molekülden oluşan gazın V hacmini doldururlar. Bu durumda birim hacimdeki molekül sayısı $n = N/V$ olmak üzere,

$$S_0^3 N = V \quad (30)$$

dir. Buradan da

$$S_0 = \left(\frac{V}{N} \right)^{1/3} = n^{-1/3} \quad (31)$$

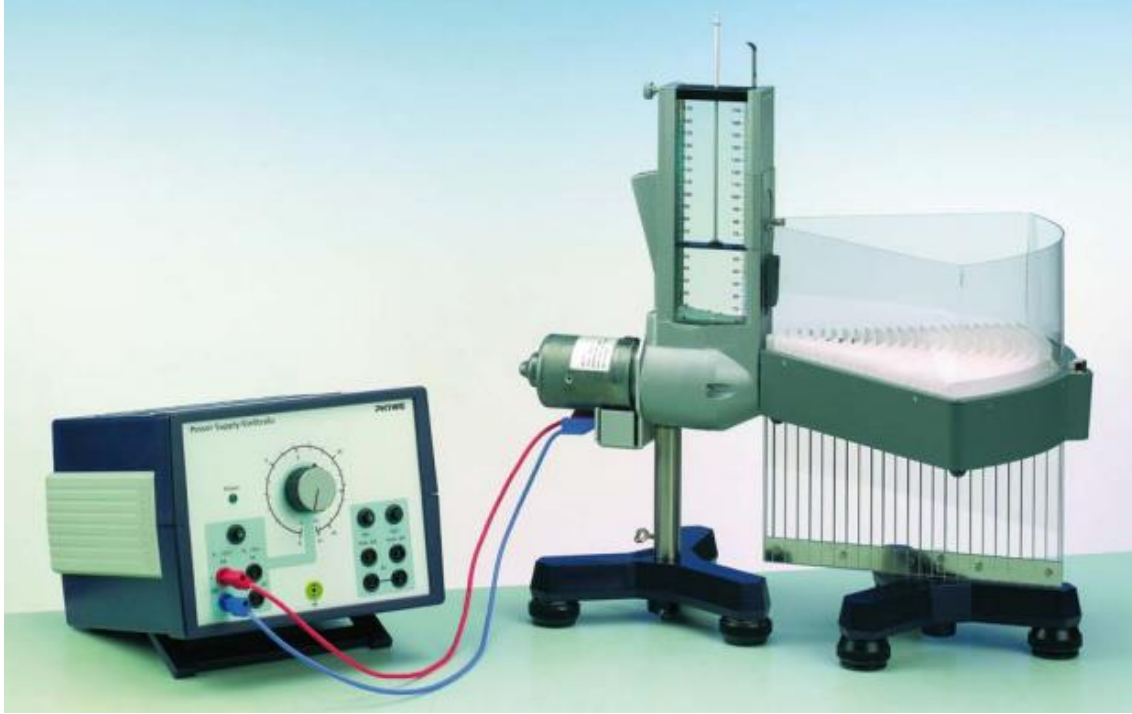
Bu durumda klasik yaklaşımın geçerlilik koşulunun kullanılmasıyla

$$\frac{\lambda_0}{S_0} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mkT}} n^{1/3} \ll 1 \quad (32)$$

koşulu elde edilir. Bu bağıntı klasik yaklaşımın, gazın yeterince seyreltilmiş (n küçük), T sıcaklığının yeterince büyük ve molekülün kütlesinin çok küçük olmaması durumunda geçerli olacağını gösterir.

DENEY

Deney Düzeneđi



Şekil 1. Maxwell-Boltzmann hız dağılım deney düzeneği

Tablo 1. Deneyle ilgili sabitler

Bilyelerin titreştirildiđi hacim	$V = 72 \text{ cm}^3$
Titreştiriciye konulan toplam bilye sayısı	$N = 400$
Frekans	$f = 2500 \text{ devir/dakika}$
Bilyelerin düşme yüksekliği	$h = 8 \text{ cm}$

Deneyin Yapılışı

Şekil 1’de verilen deney düzeneğini kurun. Titreştirici içinde cam bilye olup olmadığını kontrol edin, eğer titreştirici içinde cam bilye var ise ya onları çıkartın ya da sayısını tespit edin. Ayrıca oluklu sektör içinde de bilye bulunmamasını sağlayın. Cam bilyelerin titreştiriciden çıkışını sağlayacak olan deliği kapatın. Cam bilyelerden 400 tane sayarak (varsa titreştirici içindekiler de dahil) titreştirici içine boşaltın. Güç kaynağı ile oynayarak bilyeleri titreştirmeye başlayın. Belli bir frekansa (2500 devir/dakika) ayarlanmış olan stroboskobu kullanarak bilyelerin titreşim frekansını belirleyin. Bilyelerin çıkışı için titreştiricinin deliğini açarak 2 dakika bekleyin ve sonra kapatın. Çembersel sektörlerle düşen bilyeleri başka yerlere dökmeden oluklu sektörlerde bilyelerin dağılımına bakın. Her bir oluktaki bilyeleri sayarak Tablo 2’yi doldurun. Aynı işlemleri $t = 4$ dakika için de tekrarlayın.

Verilerin Değerlendirilmesi

Deneyssel verilerden x_{eno} ve $n(x_{eno})$ değerlerini belirleyin ve bu değerleri kullanarak A sabitini hesaplayın. Daha sonra her bir x değeri için teorik $n(x)$ değerlerini hesaplayarak Tablo 2’de yerlerine yazın.

Deneyssel $n(x)$ değerlerinin x ile değişimini gösteren histogramı ve kuramsal olarak elde edilen $n(x)$ değerlerinin x ile değişimini gösteren eğriyi aynı grafik üzerine çizin. Histogram ile dağılım fonksiyonunu uyumlu olup olmadığını irdeleyin.

Ayrıca v_{eno} , v_{kok} ve $\bar{v}$ değerlerini de hesaplayarak t süresi ile ilişkili midir açıklayın.

Tablo 2. Deneyssel ve kuramsal veriler

	t = 2 dk		t = 4 dk.	
x(cm)	n(x) deneyssel	n(x) kuramsal	n(x) deneyssel	n(x) kuramsal
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				

SORULAR

1. Maxwell hız dağılımına uyan bir molekülün kinetik enerjisinin en olası değerini veren en kısa ifadeyi türetiniz.
2. Maxwell hız dağılımına uyan bir gaz sisteminde moleküllerin hız bileşenlerinin büyüklüğünün ortalamasını veren ifadeyi bulunuz.
3. Eşitlik 8'de yer alan C sabitinin Eşitlik 9'da verilen ifadeye eşit olduğunu gösteriniz.
4. Gerekli işlemleri yaparak v_{eno} , $\bar{v}$, $\overline{v^2}$ ve x_{eno} 'nin föyde verilen ifadelerini bulunuz.
5. Başlangıçta 400 tane bilye sayılarak titreştirici içine konulduğu halde niçin dağılıma katkıda bulunan bilye sayısı bilinmiyor kabul edilerek efektif bilye sayısı hesap edilmektedir?

ISIL IŞINIMIN İNCELENMESİ

Deneyde kullanılan araçlar

Işıma algıcısı, ısı ışıma kübü, pencere camı, yansıtıcı malzemeler, milivoltmetre, ohmmetre, termometre, Stefan-Boltzmann lambası, güç kaynağı, ampermetre (0–3 A), voltmetre (0–12 V)

GİRİŞ

Sıcaklığı, mutlak sıfır sıcaklığının üstünde olan her cisim ısı yayar. Örneğin bir metal ısıtıldığında, sıcaklığına bağlı olarak kırmızıdan, sarı ve beyaza kadar renk alır, başka bir deyişle görünür bölge frekans aralığında yayınım yapar. Cisimlere ilişkin yayınım frekansları doğaldır ki görünür bölgenin dışında da değerler alabilir. Bir cismin ışıması o cismin üzerine düşen ışıyımı soğurma yeteneği ile de yakında ilgilidir. Cisim sabit sıcaklıkta ise çevresi ile ısı dengede olduğundan, ışıyımı yayma hızı ile ışıyımı soğurma hızının aynı olması gerekir. Üzerine düşen tüm ışıyımı soğuran ideal cisme siyah cisim adı verilir. DeneySEL olarak böyle bir ortam duvarları T sıcaklığında tutulan içi oyuk bir cisimle gerçekleştirilebilir. Bu cismin duvarında açılacak küçük bir delikten dışarı çıkan ışıyımın enerji yoğunluğunun incelenmesi 19. yüzyıl sonlarında araştırmacıların başlıca konusu olmuş ve sonuçta kuvantum kuramının ortaya çıkmasını sağlamıştır. Işıyım şiddetinin frekansa bağlı olarak incelenmesinden, ışıyımın

a) sürekli olduğu, **b)** geniş bir frekans aralığını kapsadığı, **c)** maksimum şiddetin T'ye bağlı bir dalga boyunda olduğu, **d)** maddenin şeklinin ve kullanılan malzemenin önemli olmadığı **e)** yalnız T ve ν frekansına bağlı olduğu gözlenmiştir.

Oyuk içinde enerji yoğunluğunun (T sıcaklığındaki oyukun birim hacminde λ ile $\lambda+d\lambda$ dalga boyu aralığındaki enerji) değeri Wien tarafından termodinamik yöntemlerle

$$u_T(\lambda)d\lambda = \frac{f(\lambda T)}{\lambda^5} d\lambda$$

olarak bulunmuştur. Daha sonra Stefan siyah cismin toplam ışıyım enerjisi için

$$E = \int_0^{\infty} u_T(\lambda)d\lambda = \varepsilon\sigma T^4$$

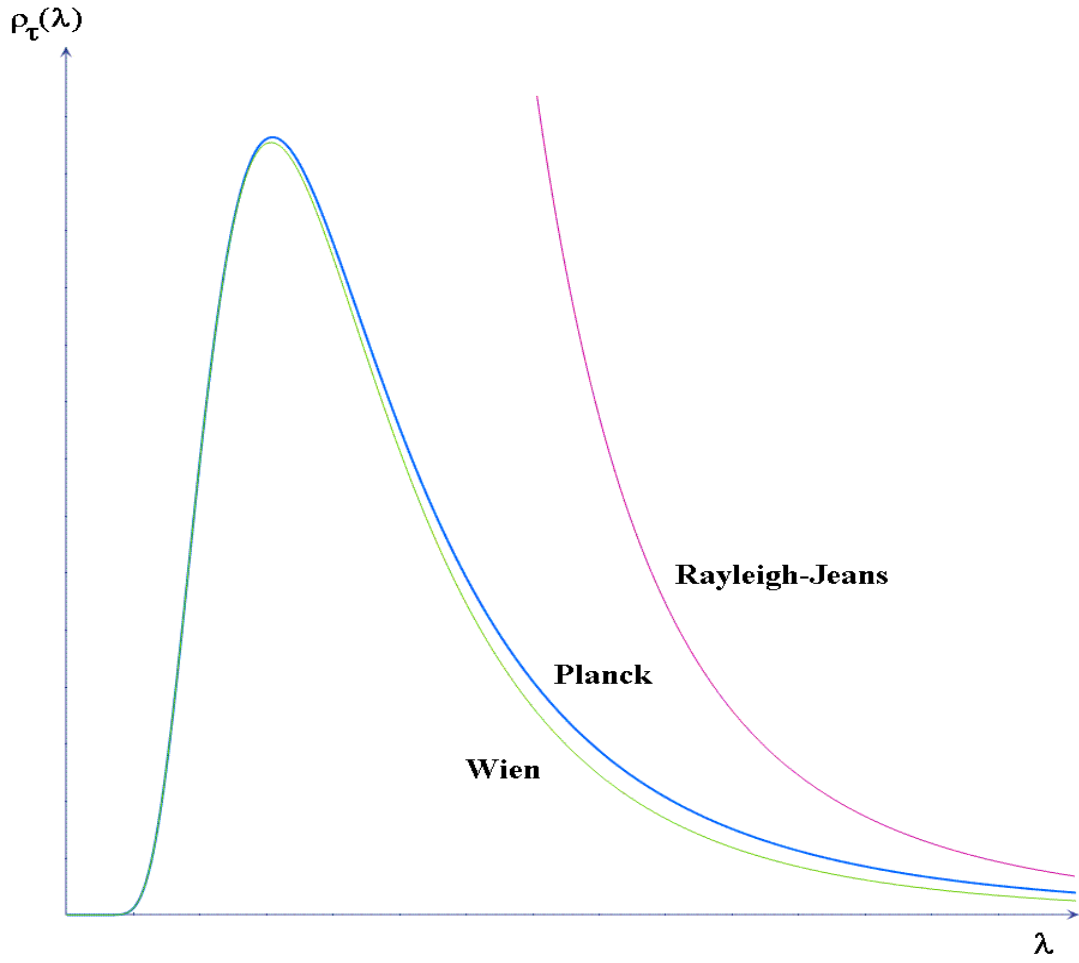
bağıntısını bulmuştur. Burada $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ Stefan-Boltzmann sabiti, ε ışıyım yapan yüzeyin yayınım katsayısıdır. Siyah cisim için $\varepsilon = 1$ dir. $u_T(\lambda)$ 'nin açık ifadesini elde etmek üzere siyah cismin duvarlarının λ dalga boyunda ışıyım yapan belli sayıda titreşiciden oluştuğu ve her bir titreşici enerjisinin kT 'ye eşit olduğu varsayılmıştır. Buradan Rayleigh ve Jeans, oyukun birim hacminde λ ile $\lambda+d\lambda$ dalga boyu aralığındaki enerji için,

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda$$

sonucuna ulaşmıştır. Büyük dalga boylarında bu sonuç deneyle uyumludur. Ancak toplam ışıyım enerjisi için

$$E = \int_0^{\infty} \rho_T(\lambda)d\lambda = \infty$$

kabul edilemez bir sonuç verir (Şekil.1).



Şekil 1.

Kuramla deneysel sonuçlar arasındaki bu uyumsuzluğu çözmek üzere Max Planck, 1900 yılında, deneyle iyi uyuşan bir bağıntı önerdi. Bu bağıntıda, bugün Planck değişmezi olarak adlandırdığımız önemli bir sayı, $h=6.625 \times 10^{-34}$ Js yer alıyordu. Buna göre oyuk içindeki bir osilatörün enerji soğurması ya da yayınımlı sürekli biçimde değil, $h\nu$ gibi bir kuvantumun tam katları biçiminde,

$$E_n = nh\nu \quad n=0,1,2,\dots$$

değerlerinde gerçekleşiyordu. Planck ışıınım bağıntısı

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

ile verilir ve deneyle iyi uyum sağlar.

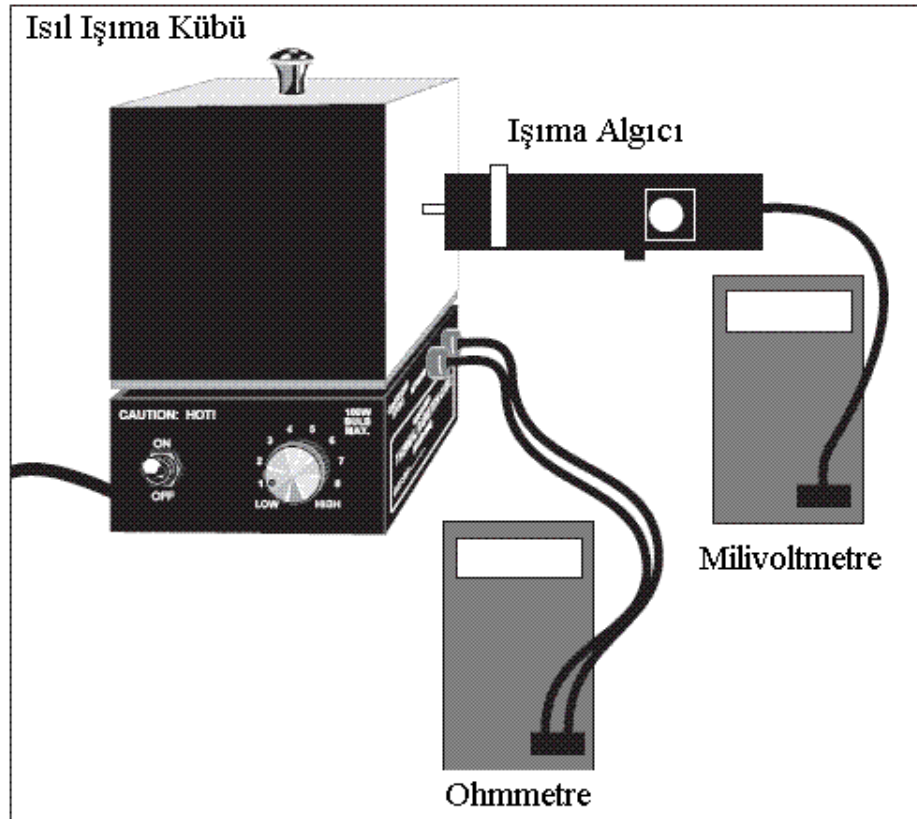
DENEY

KESİM 1: Isıl Işıma Giriş

Deneyin Yapılışı

1. Şekil 2'de gösterilen devreyi kurunuz.
2. Isıl ısıma kübünü açınız ve güç düğmesini YÜKSEK konumuna getiriniz. Kübün direnci $\approx 40 \text{ k}\Omega$ değerine düştüğünde güç düğmesini 5.0 konumuna ayarlayınız.
3. Küp ısıl dengeye ulaştığında (ohmmetreden okunan direnç değeri yaklaşık sabit kaldığında), ısıma algıcını kullanarak, kübün dört farklı yüzeyinden yayılan ışımayı algıcı her yüzeye dokundurup bu sırada voltmetredeki sapmayı kaydederek okuyunuz. Ohmmetreden okunan direnç değerine karşı gelen sıcaklığı Tablo.1.'den bulunuz.
4. Güç düğmesinin konumlarını sırası ile 6.5, 8.0 ve YÜKSEK konumlarına ayarlayınız, her konum için kübün ısıl dengeye gelmesini bekledikten sonra yukarıdaki ölçümleri tekrarlayınız.
5. Algıcı, ısıma kübünün siyah yüzeyinden $\approx 5 \text{ cm}$ uzaklığa yerleştirerek ölçtüğü değeri kaydediniz.

Daha sonra ölçümleri araya cam, köpük gibi farklı malzemelerle tekrarlayınız.

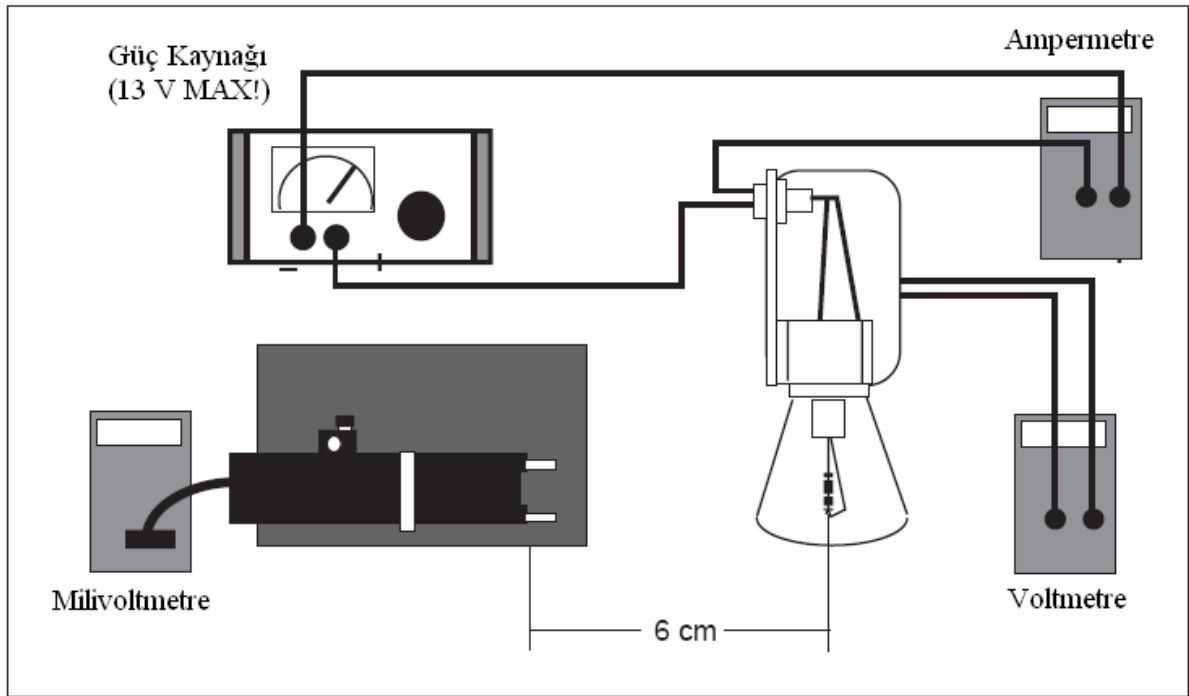


Şekil 2.

KESİM 2. Stefan-Boltzmann Yasası

Deneyin Yapılışı

1. Deneyin yapıldığı ortamın sıcaklığını ve bu sıcaklıkta Stefan-Boltzmann lambasının filaman direncini (R_{ref}) duyarlıklı olarak ölçünüz.
2. Şekil 3'deki devreyi kurunuz. Devrenin kuruluşunda, algıcın ön yüzünü filamandan ≈ 6 cm uzakta olacak biçimde ayarlayınız ve algıç ile filamanın yüksekliklerinin aynı olmasına özen gösteriniz.



Şekil 3.

3. Güç kaynağını açınız ve 1V - 10 V aralığında 1 V'luk adımlarla akım değerlerini ve milivoltmetreden ışıma ile ilişkili gerilim değerlerini [Rad(mV)] okuyunuz.

ÖNEMLİ UYARI! Algıçla okumaları hızlıca yapınız. Okumalar arasında algıçla lamba arasına bir yansıtıcı levha yerleştirerek algıcın sıcaklığının sabit kalmasını sağlayınız.

4. Her bir gerilim değeri için Ohm Yasasını kullanarak filaman direncini ve her direnç değerinde

$$T = \frac{R - R_{ref}}{\alpha R_{ref}} + T_{ref}$$

bağıntısı uyarınca T filaman sıcaklığını hesaplayınız. Burada α filaman direnci için sıcaklık katsayısıdır ve tungsten için $\alpha = 4.5 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ dir.

5. Rad (mV)- T^4 grafiğini çizin ve yorumlayınız.

SORULAR

1. Wien yer değiştirme yasasını açıklayınız ve bu yasayı Planck bağıntısından türetiniz.
2. Planck bağıntısını kullanarak siyah cismin yaydığı ışının sıcaklığın 4. kuvveti ile orantılı olduğunu gösteriniz.
3. 2500 K'de tutulan bir siyah cisim için yayının maksimum olduğu dalga boyunu bulunuz, elektromagnetik spektrumun hangi bölgesine düştüğünü açıklayınız.

Tablo 1. Isıl ışıınım kübü için direnç-sıcaklık verileri.

Termistör Direnci (Ω)	Sıcaklık ($^{\circ}\text{C}$)	Termistör Direnci (Ω)	Sıcaklık ($^{\circ}\text{C}$)	Termistör Direnci (Ω)	Sıcaklık ($^{\circ}\text{C}$)	Termistör Direnci (Ω)	Sıcaklık ($^{\circ}\text{C}$)	Termistör Direnci (Ω)	Sıcaklık ($^{\circ}\text{C}$)	Termistör Direnci (Ω)	Sıcaklık ($^{\circ}\text{C}$)
207850	10	66356	34	24415	58	10110	82	4615.1	106	2881.0	130
197560	11	63480	35	23483	59	9767.2	83	4475.0	107	2218.3	131
187840	12	60743	36	22590	60	9437.7	84	4339.7	108	2157.6	132
178650	3	58138	37	21736	61	9120.8	85	4209.1	109	2098.7	133
169950	14	55658	38	20919	62	8816.0	86	4082.9	110	2041.7	134
161730	15	53297	39	20136	63	8522.7	87	3961.1	111	1986.4	135
153950	16	51048	40	19386	64	8240.6	88	3843.4	112	1932.8	136
146580	17	48905	41	18668	65	7969.1	89	3729.7	113	1880.9	137
139610	18	46863	42	17980	66	7707.7	90	3619.8	114	1830.5	138
133000	19	44917	43	17321	67	7456.2	91	3513.6	115	1781.7	139
126740	20	43062	44	16689	68	7214.0	92	3411.0	116	1734.3	140
120810	21	41292	45	16083	69	6980.6	93	3311.8	117	1688.4	141
115190	22	39605	46	15502	70	6755.9	94	3215.8	118	1643.9	142
109850	23	37995	47	14945	71	6539.4	95	3123.0	119	1600.6	143
104800	24	36458	48	14410	72	6330.8	96	3033.3	120	1558.7	144
100000	25	34991	49	13897	73	6129.8	97	2946.5	121	1518.0	145
95447	26	33591	50	13405	74	5936.1	98	2862.5	122	1478.6	146
91126	27	32253	51	12932	75	5749.3	99	2781.3	123	1440.2	147
87022	28	30976	52	12479	76	5569.3	100	2702.7	124	1403.0	148
83124	29	29756	53	12043	77	5395.6	101	2626.6	125	1366.9	149
79422	30	28590	54	11625	78	5228.1	102	2553.0	126	1331.9	150
75903	31	27475	55	11223	79	5066.6	103	2481.7	127		
72560	32	26409	56	10837	80	4910.7	104	2412.6	128		
69380	33	25390	57	10467	81	4760.3	105	2345.8	129		

Adı-Soyadı:

No:

ISIL IŞINIMIN İNCELENMESİ

KESİM I. ISIL IŞINIMA GİRİŞ

Konum	5	6,5	8	Yüksek	Yüksek	
<u>Yüzey</u>	<i>Rad (mV)</i>	<i>Rad (mV)</i>	<i>Rad (mV)</i>	<i>Rad (mV)</i>	<u>Siyah Yüzey</u>	<i>Rad (mV)</i>
<i>Siyah</i>					<i>5cm (mV)</i>	
<i>Beyaz</i>					<i>Cam (mV)</i>	
<i>Parlak Al</i>					<i>Kağıt (mV)</i>	
<i>Mat Al</i>					<i>Köpük (mV)</i>	
<i>Küp Sıcaklığı (°C)</i>					<i>Naylon (mV)</i>	

KESİM II. STEFAN-BOLTZMANN YASASI

T_{Ref} = K

R_{Ref} = Ω

VERİLER			HESAPLAMALAR		
<i>V (V)</i>	<i>I (A)</i>	<i>Rad (mV)</i>	<i>R=V/I (Ω)</i>	<i>T (K)</i>	<i>T⁴ ×10¹³ (K⁴)</i>
1,00					
2,00					
3,00					
4,00					
5,00					
6,00					
7,00					
8,00					
9,00					
10,00					
11,00					
12,00					

$\alpha_{\text{Tungsten}} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

YÜKLENMİŞ ZAR

GİRİŞ

Bu deneyde bir çift zar kullanılacaktır; bu çiftten birinin bir yüzüne küçük kurşun parçalar eklenerek yüklenmiş, diğeri ise yüklenmemiştir. Sorun hangi zarın ve hangi yüzünün yüklenmiş olduğunu bulmaktır. Problemin çözümü için çeşitli yollar önerilebilir. Örneğin, zarla aynı yoğunluğa sahip bir sıvı kullanılabilir. Zar sıvının içine batırılır ve bir yüzünün her zaman yukarı gelip gelmediği not edilir. İkinci yöntem olarak zar kendinden daha az yoğun olan viskoz bir sıvının içinde düşmeye bırakılabilir. Bir diğer yöntem de zarı birkaç değişik şekilde bağlayıp asarak kütle merkezini bulmak olabilir.

Bu deneyde şans oyunları yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntemde her zar defalarca atılarak hangi yüzünün yukarı geldiği kaydedilir. Bu yöntemin kötü yanı büyük hatalar verme olasılığıdır. Çünkü hangi yüzün yukarı geldiği zarın, atıldığı andaki konumuna, dönme derecesine, masaya nasıl çarptığına ve nasıl yüklendiğine bağlıdır. Bütün bu etkenlerin gelişigüzel olduğu varsayılır ve zar yeterince çok sayıda atılırsa zarın yüklü olup olmadığı ve nasıl yüklü olduğu belirlenebilir.

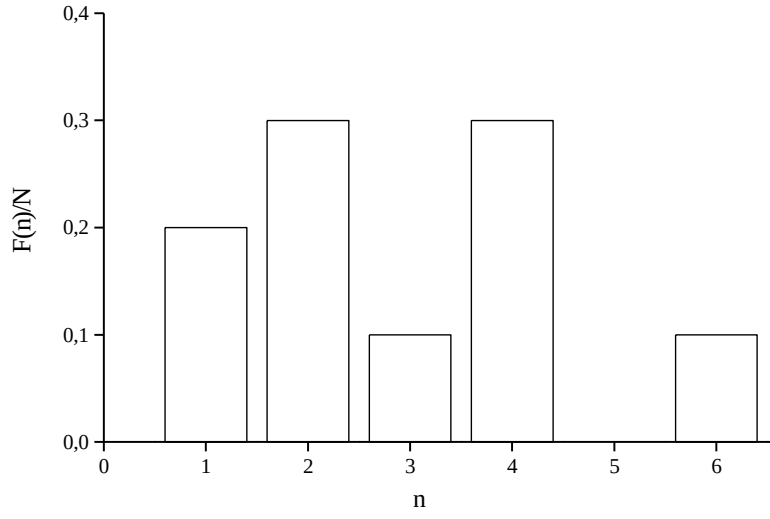
DENEY

Deneyde yeşil ve kırmızı renkte iki zar kullanılacaktır. N zarların atılma sayısını, n de yukarı gelen yüzeyi gösterebilir. Bundan dolayı n, 1'den 6'ya kadar değişir. Her sayının kaç kez geldiği F(n) ile gösterilir ve frekans olarak adlandırılır. Örneğin bir deneyde 1 sayısı 7 kez, 2 sayısı 5 kez, vb. gelmişse $F(1) = 7$, $F(2) = 5$, vb. olur.

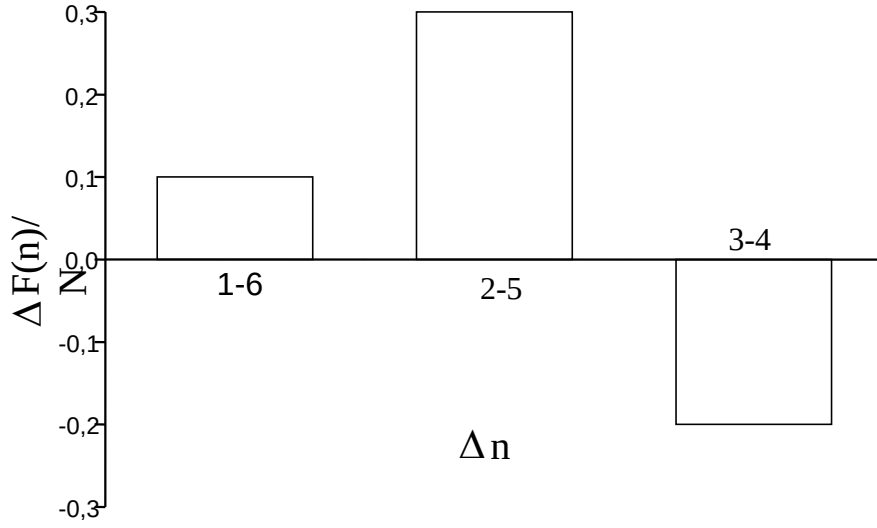
Her zarı 10 kez ($N=10$) atın ve her zar için her yüzün geliş frekansını kaydedin. Her frekans için $F(n)/N$ 'yi hesaplayarak her yüz için olasılığı belirleyin. Şekil 1'dekine benzer olarak bulduğunuz değerlerin histogramını çizin.

Bulunan deneysel olasılığı, $f(n)$ ile gösterdiğimiz kuramsal olasılıkla karşılaştıralım. $f(n)$ 'nin ne olmasını bekleriz? Yüklenmemiş bir zar için altı yüzünün her birinin gelmesi aynı derece de olasıdır ve bu nedenle $f(n) = 1/6 = 0,1666...$ olmasını bekleriz. Bu değerden sapma gözlersek ya N çok küçüktür ve gelişigüzel dalgalanmalar göze çarpacak büyüklüğü bulur veya yüzeyler arasında sistematik bir fark vardır (zar yüklüdür). Burada istatistiksel problem, verilerin çözümlenmesi ile $f(n) = 1/6$ 'dan gözlenen sapmaların önemli olup olmadığının belirlenmesidir.

Fiziksel temele göre şunu bekleyebiliriz; Belli bir yüz gelişigüzel frekansla değil de daha sık yukarı geliyorsa, zar bunu altta kalan yüzün zararına yapıyor demektir. Bundan dolayı zıt yüzler için olasılık farkına bakmak isteriz. Şekil 2'dekine benzer olarak zıt yüzlerin fark histogramını çizin. Değerlerinizden hangi zarın ve hangi yüzünün yüklü olduğunu tahmin edebilir misiniz? Bir deneme yapın.



Şekil 1. Olasılık histogramı



Şekil 2. Zıt yüzler için olasılık histogramı

Her zarı 100 kez atarak frekansları kaydedin. Şekil 1 ve 2'deki gibi yeni olasılık histogramlarını çizin. Şimdi hangi zarın yüklü ve hangi yüzünün yüklü olduğunu düşünüyorsunuz? İlk yaptığınız doğru muydu? Yanılmış olmanız olağandır.

Şimdi aşağıdaki soruları sorabiliriz:

- 1- Yaptığınız ilk 10 atışlık deney sonunda verilerinize göre yargınıza ne kadar güvenebilirsiniz?
- 2- 100 atışlık sonuca ne kadar güvenebilirsiniz?
- 3- Elde ettiğiniz sonucun doğru olabilmesi için kaç atış yapmanız gerekiyor? Bunu bilmek şüphesiz çok faydalıdır, çünkü yüklü yüzü % 95 kesinlikle belirtebilirseniz atışa devam etmenin çok az önemi olabilir.

Ki-Kare (Chi-square) Testi, χ^2 .

Eğer N gözlem yaparsak ve her birinin v olabilir sonucu varsa (bir zar için v = 6) verilen belli bir olayın gözlenen F(n) frekansı ile kuramsal Nf(n) frekansı arasındaki beklenen sapma hakkında tahmin yapabiliriz. 60 atışta verilen bir n için frekansı beklediğimiz gibi 10 değil de 12 olarak bulabiliriz. 600 atış için de 100 yerine 94 bulabiliriz. Burada önemli nokta şudur; N atış sayısı arttıkça beklenen ve gözlenen frekanslar arasındaki fark, beklenen frekansın kendisi ile aynı hızla artmaz. Gerçekte, bu farkın ortalama olarak beklenen frekansın karekökü ile orantılı olarak arttığı inanmak gerekir.

Yukarıdaki ifadeye göre,

$$\frac{F(n) - Nf(n)}{[Nf(n)]^{1/2}} \quad (1)$$

niceliği verilen bir n için 1 basamağında olmalıdır. Elde edilebilecek negatif farkları ortadan kaldırmak için yukarıdaki ifadenin karesini alırız: Sonra da n'nin farklı v değeri için bu terimleri toplarız (zar için v = 6 'dır). Sonuç genellikle χ^2 ile gösterilir:

$$\chi^2 = \sum_n \frac{[F(n) - Nf(n)]^2}{Nf(n)} \quad (2)$$

Bu toplamın v basamağında olmasını bekleriz; v'den yeterince büyükse, başka bir deyimle gözlenen frekanslar ile beklenen frekanslar arasında ortalama olarak beklenmedik büyük farklar varsa, o zaman gözlemekte olduğumuz sistemin beklediğimiz gibi ideal dağılıma uymadığından şüphelenebiliriz. İdeal sistem yüklenmemiş bir zar ise, bunun için $f(n)=1/6$ 'dır. χ^2 'nin 6'dan büyük bir değeri zarın yüklenmiş olduğunu gösterir.

Bütün durumların eşit olasılıklı olduğunda $f(n) = 1/v$ 'dur. Ayrıca $\sum F(n) = N$ olgusundan da yararlanabiliriz. Bu durumda Eşitlik (2)'yi basitleştirerek

$$\chi^2 = N \left\{ v \sum_n \left[\frac{F(n)}{N} \right]^2 - 1 \right\} \quad (3)$$

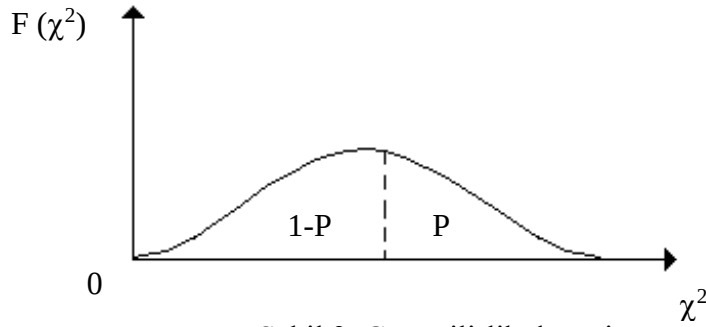
elde ederiz.

Örneğin Şekil 1'de gösterilen değerler için

$$\chi^2 = 10\{6(0.24) - 1\} = 4.4 \quad (4)$$

dür. Bu v basamağında olduğuna göre gözlenen sapmaların önemli olmadığını kabul edebiliriz.

Fakat sapmaların önemli olup olmadığına nasıl karar veriyoruz? Her bir 10 atışlık dizi için χ^2 değerini hesaplayarak bu 10 atışlık diziye çok sayıda tekrarladığımızı kabul edelim. χ^2 için Şekil 3'deki gibi normalleştirilmiş bir dağılım bekleriz. Verilen χ^2 değeri, dağılımda daha büyük değer alma olasılığı ile belirlenir. Bu, belli bir değeri aşan χ^2 değerine rastlayacak eğrinin altında kalan alanın yüzdesidir. Buna P güvenirlilik düzeyi denir. Küçük bir güvenirlilik düzeyi, olayların dağılımının geliş güzel olma olasılığının çok küçük olduğunu anlatır. Şu halde incelediğimiz durumda yüklü bir zarın büyük bir ki-karesi olacak ve bunu tutan güvenirlilik düzeyinin de küçük olması gerekecektir. Tablo1'de χ^2 'nin altı olay için değişik güvenirlilik düzeylerindeki değerleri verilmiştir. O halde χ^2 'nin 4,4 değeri için dağılımın geliş güzel olduğuna hemen hemen % 80 güvenebiliriz. Bu, daha büyük N için sapmalar görülmeyecek demek değildir. Sadece 10 atış için sapmaların önemli olmadığını söylüyor.



Şekil 3. Güvenirlilik düzeyi

Tablo1. Güvenirlilik düzeyleri

Güvenirlilik Düzeyleri(%) P v = 6	χ^2
99	0.872
98	1.134
95	1.635
90	2.204
80	3.070
20	8.558
10	10.645
5	12.592
2	15.033
1	16.812
0.1	22.452

Yeşil ve kırmızı zarlar için 10 ve 100 atıştaki ki-kareleri hesaplayın. Hangi zarın yüklenmiş olduğunu düşünüyorsunuz? Güvenilirlik düzeyiniz nedir? (Burada istatistiksel bir dalgalanma gözlüyorsunuz.)

SORULAR

1. Yüklenmemiş bir zar için teorik $f(n)$ olasılıkları

$$\sum_{n=1}^6 f(n) = 1$$

bağıntısını sağlamalıdır. Neden? Eğer zar yüklenmiş ise bu bağıntı yine sağlanır mı? Açıklayın.

2. Bir paranın 100 defa havaya atıldığını ve sonucun 54 yazı 46 tura geldiğini kabul edin. Paranın hileli olup olmadığı hakkında ne söyleyebilirsiniz?
3. Soru 1'deki bağıntıya göre $f(n)$ 'nin altı değerinin hepsi de bağımsız değildir; herhangi beşi bilinirse altıncısı hesaplanabilir. Bu χ^2 sınavasını $v = 6$ yerine $v = 5$ alacağınızı mı söylüyor? Açıklayın.
4. Hilesiz (simetrik) bir madeni para birçok defalar atılırsa yazıların turalara oranı bire yaklaşmalıdır. Bu ayrıca yazı ve tura sayısı arasındaki farkın sifıra yaklaşacağı anlamına gelir mi? Yani fark, deneme sayısı ile birlikte çok büyük değerlere ulaşırken oran yine de bire yaklaşabilir mi? Açıklayın.
5. χ^2 sınavası veya bunun değiştirilmiş bir şekli, yüklü bir zarın hangi tarafının yüklü olduğunu bulmada kullanılabilir mi? Bunun nasıl yapılabileceğini anlatın.

χ^2 Değerleri

v : Serbestlik derecesi

	OLASILIK													
v	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	.00016	.00063	.0039	.016	.064	.15	.46	1.07	1.64	2.71	3.84	5.41	6.64	10.83
2	.02	.04	.10	.21	.45	.71	1.39	2.41	3.22	4.60	5.99	7.82	9.21	13.82
3	.12	.18	.35	.58	1.00	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.82	9.84	11.34	16.27
4	.30	.43	.71	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	11.67	13.28	18.46
5	.55	.75	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	13.39	15.09	20.52
6	.87	1.13	1.64	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	15.03	16.81	22.46
7	1.24	1.56	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	16.62	18.48	24.32
8	1.65	2.03	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	18.17	20.09	26.12
9	2.09	2.53	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	19.68	21.67	27.88
10	2.56	3.06	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	21.16	23.21	29.59
11	3.05	3.61	4.58	5.58	6.99	8.15	10.34	12.90	14.63	17.28	19.68	22.62	24.72	31.26
12	3.57	4.18	5.23	6.30	7.81	9.03	11.34	14.01	15.81	18.55	21.03	24.05	26.22	32.91
13	4.11	4.76	5.89	7.04	8.63	9.93	12.34	15.12	16.98	19.81	22.36	25.47	27.69	34.53
14	4.66	5.37	6.57	7.79	9.47	10.82	13.34	16.22	18.15	21.06	23.68	26.87	29.14	36.12
15	5.23	5.98	7.26	8.55	10.31	11.72	14.34	17.32	19.31	22.31	25.00	28.26	30.58	37.70
16	5.81	6.61	7.96	9.31	11.15	12.62	15.34	18.42	20.46	23.54	26.30	29.63	32.00	39.29
17	6.41	7.26	8.67	10.08	12.00	13.53	16.34	19.51	21.62	24.77	27.59	31.00	33.41	40.75
18	7.02	7.91	9.39	10.86	12.86	14.44	17.34	20.60	22.76	25.99	28.87	32.35	34.80	42.31
19	7.63	8.57	10.12	11.65	13.72	15.35	18.34	21.69	23.90	27.20	30.14	33.69	36.19	43.82
20	8.26	9.24	10.85	12.44	14.58	16.27	19.34	22.78	25.04	28.41	31.41	35.02	37.57	45.32
21	8.90	9.92	11.59	13.24	15.44	17.18	20.34	23.86	26.17	29.62	32.67	36.34	38.93	46.80
22	9.54	10.60	12.34	14.04	16.31	18.10	21.24	24.94	27.30	30.81	33.92	37.66	40.29	48.27
23	10.20	11.29	13.09	14.85	17.19	19.02	22.34	26.02	28.43	32.01	35.17	38.97	41.64	49.73
24	10.86	11.99	13.85	15.66	18.06	19.94	23.34	27.10	29.55	33.20	36.42	40.27	42.98	51.18
25	11.52	12.70	14.61	16.47	18.94	20.87	24.34	28.17	30.68	34.38	37.65	41.57	44.31	52.62
26	12.20	13.41	15.38	17.29	19.82	21.79	25.34	29.25	31.80	35.56	38.88	42.86	45.64	54.05
27	12.88	14.12	16.15	18.11	20.70	22.72	26.34	30.32	32.91	36.74	40.11	44.14	46.96	55.48
28	13.56	14.85	16.93	18.94	21.59	23.65	27.34	31.39	34.03	37.92	41.34	45.42	48.28	56.89
29	14.26	15.57	17.71	19.77	22.48	24.58	28.34	32.46	35.14	39.09	42.56	46.69	49.59	58.30
30	14.95	16.31	18.49	20.60	23.36	25.51	29.34	33.53	36.25	40.26	43.77	47.96	50.89	59.70

OLASILIK DAĞILIMI

Deneyde Kullanılan Araçlar

Değişik renkte 3 adet 20 yüzlü zar. Bu zarların yüzlerinde 0 ‘dan 9’ a kadar olan sayılar ikişer kez yazılmıştır.

GİRİŞ

Bir rakamlı bir gelişigüzel sayılar çizelgesinde 0’dan 9’a kadar olan sayılar aynı olasılıkla ortaya çıkarlar. Örneğin çok sayıda tek rakamın bulunduğu büyük bir listedeki 7’leri sayarsak 7’lerin sayısı, toplam rakam sayısının yaklaşık onda biridir. Toplam rakam sayısı büyüdükçe oran onda bire daha da yaklaşır. Gelişigüzel seçilen bir sayının 7 çıkma olasılığı 1/10 ‘dur dendiğinde anlatılmak istenen budur. Aynı şekilde madeni bir para atıldığı zaman, yazı gelme olasılığı 1/2 ‘dir. Bunun anlamı çok sayıda atış yapılırsa yazı sayısının, toplam atış sayısına oranı 1/2 olacaktır. Bu söylenenler ancak paranın fiziksel olarak bir yana eğilimi olmadığı durumlar için geçerlidir.

Deneyde 20 yüzlü 3 zar kullanarak üç basamaklı bir sayı çizelgesi hazırlanacaktır. Zarlar hilesiz ise her zar üzerindeki sayı gelişigüzel olacaktır. Gelişigüzel sayı çizelgesi çeşitli olasılık dağılımlarının deneysel olarak incelenmesinde ve deney sonuçlarının kuramsal beklentilerle karşılaştırılmasında kullanılacaktır.

Bir sayı kümesini oluştururken, özellikle bu sayılar deneysel bir ölçü veya bir sınav sonucu ile ilgili ise, bu sayılar grubunun bazı ilginç özellikleri vardır. Bu özelliklerden en belirginini genellikle ortalama değer veya kısaca ortalama denen **aritmetik ortalama**dır. “Sınavda ortalama neydi? Aldığın not ortalamanın altında mı üstünde mi?”soruları her sınıfta duyulur. Öğrenciler tarafından alınan tüm puanlar toplanarak bulunan sonuç, öğrenci sayısına bölünür. $n_1, n_2, n_3, \dots, n_N$ veya bir örneği n_i ($i=1,2,\dots,N$) ile gösterilen N tane sayı varsa, ve bunların ortalama değeri $\bar{n}$ ile gösterilirse,tanıma göre;

$$\bar{n} = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i \quad (1)$$

olacaktır. Ortalama değer bulunduktan sonra ilginç başka bir soru, değişik sayıların, ortalama değerden, ortalama olarak ne kadar farklı olduğudur. Örnek olarak: Eğer bir sınav sonucunun ortalaması 70 ve sonuçların çoğu 65 ile 75 arasında ise “serpilme” çok fazla değil, fakat sonuçlar 20’den 99’a kadar yayılmışsa serpilme oldukça büyüktür.Açık olarak görülüyor ki 60 puanın iki durumdaki yeri farklıdır.Öyleyse **dağılganlığın** da nicel olarak ölçülmesi gerekir. Bu dağılmaya genel olarak serpilme veya dağılganlık(dispersiyon) denir.

Dağılganlığı bulmak için şu yapılabilir: Her sayı ile ortalama arasındaki fark ve bu farkların ortalaması alınabilir. Bazı farklar pozitif diğerleri negatif olduğu için bir takım güçlükler ortaya çıkar. Gerçekte farklar **ortalamasının** sıfır olduğunu doğrulamak kolaydır. Bu güçlüğü ortadan kaldırmak için her farkın **karesini** alarak pozitif sayılar elde edilir. Kareleri toplayıp N ‘ye bölerek ortalama bulur ve sonra da karekökü alınır. Sonuca bazen “ **kare ortalama karekökü** “ veya “ **kok**” saptması

denir; fakat asıl adı **standart sapmadır**. Bu şekilde ölçülen dağılganlık genellikle σ ile gösterilir. Yukarıda sözle verilen tanım aşağıdaki ifade ile verilir.

$$\sigma^2 = \frac{(n_1 - \bar{n})^2 + (n_2 - \bar{n})^2 + \dots + (n_N - \bar{n})^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (n_i - \bar{n})^2 \quad (2)$$

Standart sapmanın karesi olan σ^2 büyüklüğüne genellikle **varyans (variance)** denir. Çoğu kez özel bir sayı setinin(grubunun) ortalaması ve varyansı ile bu sayıların seçildiği ve önceden varolduğu kabul edilen bir sayılar grubunun ortalaması ve varyansını ayırt etmek gerekir. Örneğin yirmi yüzlü zarlardan biri ele alınmış olsun. Bütün sayılar aynı olasılıkla çıkıyorsa ortalamanın tam 4.50 olması gerektiği kolaylıkla görülebilir. Eğer zar 36 kez atılırsa elde edilen sonuç 4.50 ‘den biraz farklı olabilir ve eğer 9 kez atılırsa ortalamanın 4.50 ‘a yakın olması söz konusu olamaz. Belli bir deneyde elde edilmiş sayılar grubu olan bir **örnek dağılım** ile bu dağılımın alınmış olduğu, çok sayıdan oluşmuş **ana dağılımın** birbirinden ayırt edilmesi gerekir. Aynı şekilde, ele alınan örnekte tam olarak 4.50 olan **ana ortalama** ile genellikle biraz farklı olan **örnek ortalamayı** da birbirinden ayırt etmek gerekir. Çoğu kez örnek dağılımın içindeki eleman sayısı fazla olması durumunda, ana dağılıma çok yakın sonuçlar vermesi beklenir. Benzer şekilde **örnek varyans** ve **ana varyans** gibi tanımlar da yapılabilir..

DENEY

Yirmi yüzlü üç zardan elde edilen sayıları Çizelge 1 ‘e geçirerek 360 rakamlı bir gelişigüzel sayılar çizelgesi kurun. Zarlardan sayıları okurken hep aynı sırayı izleyin (örneğin kırmızı, sarı, mavi) . Bu kural neden önemlidir? Üç zarla bir tek atışta üç sayı elde ederek kurulmuş bir sayı çizelgesini, bir atışta bir sayı elde ederek kurulan çizelgeden ayırt edebilir misiniz?

Her sayının (0 ‘dan 9 ‘a kadar) çizelgede kaç kez tekrarlandığını Çizelge 2A ‘ ya geçirin ve bu sayılardan her sayının tekrarlanma **olasılığını** hesaplayın. Sonuçlarınız ana dağılımdaki kuramsal olasılıklarla ne kadar uyuyor?

Çizelge 1 ‘den 36 sayılık bir alt grup seçin. Gelişigüzelliği sağlamak için ardarda bir sayı dizisi seçmek faydalıdır. Bu sayıların frekanslarını ve hesaplanan olasılıklarını Çizelge 2B’ye kaydedin. Bu sayı örneğinin ortalamasını ve **varyansını hesaplayın**. Sonuçlarınızı aşağıda hesaplanan ana ortalama ile ve varyansla karşılaştırın. Ayrıca Çizelge 1’in tümü için orta lamayı ve varyansı hesaplayarak ana değerlerle karşılaştırın. Aynı ayrı sayılarla uğraşacak yerde her sayının çıkış **frekansını** kullanırsanız hesaplar kolaylaşır. Örneğin, n_i sayısı örnek içinde F_i kez çıkmış ise örnek ortalaması:

$$\bar{n} = \frac{n_1 F_1 + n_2 F_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots} = \frac{\sum n_i F_i}{\sum F_i} \quad (3)$$

ile verilir.

ÇİZELGE 1.

[illegible]

ÇİZELGE 2A

Sayı	Frekans	Olasılık
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

ÇİZELGE 2B

Sayı	Frekans	Olasılık
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Toplamlarda 36 veya 360 yerine sadece 10 terim alınmıştır. Benzerince örnek **varyansı**

$$\sigma^2 = \frac{\sum F_i(n_i - \bar{n})^2}{\sum F_i} \quad (4)$$

olur. Şunu da belirtelim ki, her iki durumda $\sum F_i$ örnekteki rakam sayısı toplamı olan N' ye eşittir.

Bu halde **ana** dağılımdaki bütün i 'ler için $F_i = N / 10$ bekleriz. O zaman Denklem (3)

$$\bar{n} = \sum n_i / 10 = 4.5$$

verir ve Denklem (4)'de

$$\sigma^2 = \frac{\sum (n_i - \bar{n})^2}{10} = \frac{\sum n_i^2}{10} - \bar{n}^2 = 28.50 - 20.25 = 8.25 \quad (5)$$

verir. 36 veya 120 girişle sınırlı bir örnekte ortalamayı tam 4.5 bulamazsak bize pek şaşırtıcı gelmemeli. Buna karşın daha büyük örnekler için kabulümüzün doğru çıkacağını beklemek gerekir. Sonuçlarımızın akla yakın olup olmadığına sezile karar verin. Ayrıca örnek büyüklüğüne bakarak uyuşmanın düzelip düzelmediğine dikkat edin. Neyin uygun bir sapma sağladığı Binom Dağılımı deneyinde ele alınarak tartışılmaktadır.

Rakam Çiftleri

Şimdi 100 rakam **çifti** seçin. Bu basitçe her üç rakamlı gruplar serisinde soldaki ilk iki rakamını almakla yapılır. Her çiftin toplamını alarak değeri 0 ile 18 arasında 100 sayı elde edin. Bu rakamların toplamalarının çıkış olasılığı aynı değildir. Çünkü bunların çoğu farklı birkaç şekilde oluşturulur. Çizelge 3 her toplamın çıkabileceği çeşitli yolları ve bunların olasılıklarını tam olarak vermektedir. Bu çizelgeyi tamamlayın. Olasılıklar toplamı bire eşit oluyor mu?

Seçtiğiniz 100 çiftli örnekte 0 ile 18 arasındaki her sayının çıkış frekansını Çizelge 4 'e yazın. Toplam çift sayısına bölerek örnek olasılığını hesaplayın Çizelge 3 'de verilen ana değerlerle karşılaştırın. Örneğinizin ortalama değerini hesaplayın ve bunu ana ortalama değer olan 9 sayısı ile karşılaştırın. Örneğinizin varyansını hesaplayın 16.50 ana değeri ile karşılaştırabilirsiniz. İki rakamlı sayıların toplamı ile ilgili varyansın bir rakamlı sayıların varyansının iki katına eşit olduğuna dikkat edin.

ÇİZELGE 3.

Toplam						Olasılık
0	00					1/100 = 0.01
1	01	10				2/100 = 0.02
2	02	11	20			3/100 = 0.03
3	03	12	21	30		4/100 = 0.04
4	04	13	22	31	40	5/100 = 0.05
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16	79	88	97			3/100 = 0.03
17	89	98				2/100 = 0.02
18	99					1/100 = 0.01

ÇİZELGE 4

Sayı	Frekans	Olasılık	Sayı	Frekans	Olasılık
0			10		
1			11		
2			12		
3			13		
4			14		
5			15		
6			16		
7			17		
8			18		
9					

SORULAR

1. Hava raporundaki yağmur olasılığı onda birdir denirse, bundan ne anlıyorsunuz? Bu durum hangi anlamda istatistiksel bir örnektir?
2. Her biri 0 ile 9 arasında gelişigüzel 5 sayıdan **hepsinin**, sadece **birinin** 7 olma olasılığı ile **hiçbirinin** 7 olmama olasılığı nedir?
3. N sayıda bir grup için ortalama değerden sapmaların ortalamasının 0'a eşit olduğunu gösterin.
4. Gelişigüzel sayılar çizelgesinin tam anlamıyla gelişigüzel olmasını engelleyecek hata kaynakları nelerdir?
5. Herhangi N tane n_i sayılar grubu için varyansın $\sigma^2 = \langle n^2 \rangle_{\text{ort}} - (\bar{n})^2$ ile verildiğini gösteriniz. Burada $\langle n^2 \rangle_{\text{ort}}$ simgesi n_i^2 'nin ortalamasını gösterir.
6. p tane n_i sayısının toplamının varyansının, bir tek n_i sayısının varyansı defa p olduğunu gösteriniz. Ortalama değer p ile oranlı biçimde değişirken standart sapmanın sadece karekök p ile azaldığına dikkat edin. Buna göre toplam içerisinde ne kadar çok rakam bulunursa ortalamaya göre olan dağılım o kadar dar olacaktır.
7. Çizelge1'de olasılıklar toplamının 1 olduğunu, toplam işlemi yapmadan gösteriniz. *Yol gös.: İlk N tam sayısının toplamı $N(N+1)/2$ 'dir.*
8. Gelişigüzel iki rakam toplamlarının dağılımı için ana ortalama ve varyans değerlerini türetiniz.

BİNOM DAĞILIMI

GİRİŞ

Bu deneyde binom dağılımı diye bilinen, çok yararlı özel bir olasılık dağılımını incelemek için gelişigüzel sayılar çizelgenizi ve bazı basit deney araçlarını kullanacaksınız.

Binom dağılımını tanıtmak amacıyla bazı para atma problemleri ile işe başlayalım. Simetrik bir para atıldığında bunun "yazı" gelmesi veya "tura gelmesi olasılığı 1/2'dir (yani %50). Paranın düşüş şeklini denetleyemeyiz ve her atış daha önceki tüm atışlardan bağımsızdır. Bu nedenle bir atıştan yazı çıkmışsa, bir yazı daha gelme olasılığı yine 1/2'dir; para bir önceki atışı hatırlamaz.

Bu sırada iki yazı gelme olasılığı nedir? Bu değişik bir sorudur. Bu olayın çıkması her birinin başarı olasılığı 1/2 olan bağımsız iki ayrı olayın oluşlarına bağlıdır. Bileşik olayın olasılığı ayrı olasılıkların çarpımına, veya 1/4'e eşittir. Bu sonucu değişik bir yoldan elde etmek için şuna dikkat etmek gerekir; para iki defa atılırsa eşit olasılıklı dört ayrı olay vardır:

YY YT TY TT

Bu dördünden yalnız bir tanesi istediğimiz olaydır, o halde olasılık 1/4'dür. Bir parayı ardısıra artacak yerde, iki özdeş parayı aynı anda atarak da aynı sonucu elde edebiliriz. Zaman sırasının bir önemi yoktur.

Üç atış halinde, her atışın olabilir iki sonucu bulunduğu için olasılığı eşit olayların toplam sayısı 2^3 veya 8'dir. Bu olaylar şunlardır:

YYY YYT YTY YTT TYY TYT TTY TTT

Şu halde arka arkaya üç yazı elde etme olasılığı 1/8'dir. Gerçekten yukarıdaki olayların **her biri** için olasılık $(1/2)^3$ 'tür. N atış halinde yazı ve turaların herhangi bir dizilişi için olasılık $(1/2)^N$ olur.

Şimdi biraz daha değişik bir soru soralım. Üç atışta iki yazı gelme olasılığı nedir? Bu sonucu veren üç değişik diziliş vardır; YYT, YTY ve TYY. Her birinin olasılığı 1/8 olduğuna göre toplam olasılık 3/8'dir. Aynı şekilde üç atışta bir tek yazı gelme olasılığı da 3/8 olacaktır. Sıfır ile üç arasında herhangi bir yazı gelme olasılığı $1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1$ 'dir. Böyle olması da pek şaşırtıcı olmasa gerek.

N atışta n yazı gelme olasılığı nedir? İlk önce, n yazıyla, N - n turaların herhangi özel bir dizilişi için olasılık $(1/2)^N$ 'dir. Fakat n yazı kaç değişik düzenleme içinde gelebilir? Yani, her defasında N sayısının n tanesi alınarak yapılabilecek düzenleme kaç tanedir? Bu soruyu cevaplandırmak için her birinin ayrı bir düşme yeri olan N tane paramız bulunduğunu düşünmek yararlıdır. n tane yazıyı bu yerlere dağıtırken bunlardan birincisi için N tane yer seçmeye hakkımız var. Bu yerlerden her birine karşılık geri kalan N - 1 yeri ikinci yazıya, bunlardan her birisi için de N - 2 yeri üçüncü yazıya vb. seçerek gider, sonunda n inci yazıyı geri kalan (N - n + 1) yerden birine yerleştirebiliriz. Buna göre N atış arasında n yazının toplam düzenlenim sayısı

$$N(N-1)(N-2)(N-3)....(N - n + 1) \quad (1)$$

gibi olacaktır. Fakat bu doğru değildir, çünkü aslında eşdeğer olan çok sayıda düzenlenişi farklıymış gibi saydık. n yazıdan hangilerinin ayrı konumlarda olduğu bizi ilgilendirmez; yazı yazıdır. O halde gerçek sayısını bulmak için bunu, n yazının kendi aralarında düzenlenişlerinin kaç şekilde yeniden düzenlenebileceğini gösteren sayıya bölmemiz gerekmektedir. Bunu hesaplamak için n sayının yeni baştan düzenlenişinde n tane yazıdan herhangi birini önce, geri kalan n - 1 taneden herhangi birisini ikinci olarak seçip sonuçta bir tek yazı kalıncaya kadar bu işleme devam edebileceğimize dikkat ediniz. n cismin böyle düzenlenme sayısına genel olarak n cismin **yerdeğiştirme** (permutasyon) **sayısı** denir, basit bir şekilde

$$n(n-1)(n-2)...(3)(2)(1) = n! \quad (2)$$

olacaktır. n! ifadesi "n faktöriyel" diye okunur ve n'den başlayıp birer birim azalan bütün tam sayıların çarpımının kısaltılmışını gösterir. Tanım olarak 0! = 1'dir.

Demek ki N denemedeki n yazıyı çeşitli düzenler içinde sıralama sayısı (buna genellikle her defasında n tanesi seçilen N cismin **birleştirim** (kombinezon) **sayısı** denir.)

$$\frac{N(N-1)(N-2)...(N-n+1)}{n!} \quad (3)$$

dir. Çoğu kez $\left[\begin{matrix} N \\ n \end{matrix} \right]$ ile gösterilen bu ifade, pay ve payda (N - n) ! ile çarpılıp

basitleştirilerek aşağıdaki şekle konabilir.

$$\left[\begin{matrix} N \\ n \end{matrix} \right] = \frac{N!}{(N-n)!n!} \quad (4)$$

Son olarak, $P_N(n)$ ile göstereceğiniz N atışta n yazı elde etme olasılığı

$$P_N(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{N!}{(N-n)!n!} = \left(\frac{1}{2}\right)^N \left[\begin{matrix} N \\ n \end{matrix} \right] \quad (5)$$

olacaktır. Bunu sınamak için 3/8 olduğunu bildiğimiz 3 atışta iki yazı elde etme olasılığını hesaplayabiliriz. Bu durumda n = 2 ve N = 3'tür.

$$P_3(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3}{8}$$

O halde bulduğumuz ifade işliyor! Olağan başka durumları sınayabilirsiniz. Şimdi küçük bir

genelleştirmeye gidelim. Para atışında bir tek yazı için olasılık 1/2 alınmıştı. Yine N bağımsız olayımız bulunsun, fakat her birinin kazanma olasılığı 1/2 değil, 0 ile 1 arasında bulunan başka bir p sayısı olsun. Buna göre N denemenin tam n tanesinin kazanma olasılığı ne olacaktır?

Bütün hesaplar basit bir değişiklikle daha önce yapılanlar gibidir. n kazanmanın özel bir şekilde düzenleniş olasılığını bulmamız ve bunu yine Denk.(4) ile verilen n kazancın N deneme arasından seçilme yolları sayısı ile çarpmamız gerekiyor. n kazanma ve N - n tane kaybetmenin özel bir düzenlenişi için olasılığı, p kazanma, q = 1 - p'de kaybetme olasılığı olmak üzere

$$p^n q^{N-n} = p^n (1-p)^{N-n} \quad (6)$$

dir. Her denemede kazanma olasılığı p olduğuna göre N denemede tam n kez kazanma olasılığı

$$P_{N,p}(n) = p^n q^{N-n} \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix} = p^n q^{N-n} \frac{N!}{(N-n)!n!} \quad (7)$$

olacaktır. Dikkat edilirse para atma deneyinde p = q = 1/2 olduğu için bu ifade öncekine indirgenmektedir.

Genelleştirilmiş olasılık formülünün basit bir uygulaması olarak birkaç tane yirmi yüzlü zarın atıldığını düşünelim: Örneğin böyle 3 zarı attığımız zaman, iki 7 elde etme olasılığı nedir? Her ayrı olay için p olasılığı 1/10, N = 3 ve n = 2'dir. Buna göre olasılık

$$P_{3,1/10}(2) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^{3-2} \frac{3!}{(3-2)!2!} = 0.027$$

dir. Denk (7) ile verilen olasılık dağılımına, binom açılımının katsayıları ile yakın ilişkisi nedeniyle **binom dağılımı** denir. Gerçekten,

$$(q + p)^N = \sum_{n=0}^N p^n q^{N-n} \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} q^N + \begin{bmatrix} N \\ 1 \end{bmatrix} q^{N-1} p + \begin{bmatrix} N \\ 2 \end{bmatrix} q^{N-2} p^2 + \dots + \begin{bmatrix} N \\ N \end{bmatrix} p^N \quad (8)$$

olduğunu göstermek güç değildir. Buradan beklenildiği gibi hemen

$$\sum_{n=0}^N P_{N,p}(n) = 1 \quad (9)$$

olduğunu görüyoruz. (Bunu neden bekledik?)

Binom dağılımında n'nin **ortalama** değeri ilgi çekicidir. Bir an için N tane para atma problemi düşünülürse, yazıların ortalamasının veya **ortalama** değerinin N deney sayısı ile her atışta yazı gelme olasılığının yani 1/2'nin çarpımına, başka deyimle N/2'ye eşit olduğu açıktır. Biraz daha az açık olsa da P'nin 1/2'ye eşit olmadığı halde de $\bar{n}$ ortalama değerinin

$$\bar{n} = Np \quad (10)$$

ye eşit olacağı akla yatkındır. Bunun doğru olduğu gösterilebilir; fakat bir takım hesap "oyun" ları gerektirdiğinden burada verilmeyecektir. Benzer oyunlarla¹ dağılımın "genişliğini" veren **dağılma** (varians) da hesaplanabilir. Bu ise

$$\sigma^2 = N p q \quad (11)$$

ile verilmektedir.

POISSON DAĞILIMI

N'nin büyük değerleri için büyük sayıların faktöriyelleri söz konusu olduğundan binom dağılımı formülü kullanışsız hale gelir. Bu halde kullanılması çok daha kolay olan yaklaşık ifadelerin elde bulunması iyi bir rastlantıdır. Burada, N büyürken p'nin çok küçüldüğü ve böylece $\bar{n} = Np$ ortalama değerinin sonlu kaldığı hallerde geçerli olan ve **Possion dağılımına** götüren yaklaşıklık ele alacağız. N büyürken p'nin küçülmediği farklı bir yaklaşıklık Deney Mİ 6'da incelenecektir. Bu yaklaşıqlığın vereceği dağılım **normal** veya **Gauss dağılımıdır**.

N'nin çok büyük ve p'nin çok küçük olduğu durumlarda geçerli olan yaklaşıklık aşağıdaki gibidir: (Bu sınırdan n'nin uygun olasılıklı değerleri ancak N'ye göre çok küçüktür.) Önce,

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N (N-1) \cdots (N-n+1) \quad (12)$$

çarpanını düşünelim. Bu, N'den pek farklı olmayan n terimin çarpımıdır. Bu nedenle Denk. (12) ifadesinin yerine N^n alacağız. İkinci olarak q^{N-n} çarpanını

$$q^{N-n} = (1-p)^{N-n} = \frac{(1-p)^N}{(1-p)^n} \quad (13)$$

şeklinde yazalım. Burada payda hemen hemen bire eşittir, çünkü bire çok yakın bir sayının çok büyük olmayan bir kuvveti alınmıştır. Böylece aşağıdaki ifade elde edilir.

¹ Doğrulamanın ayrıntıları için bk: H. D. Young- *Statistical Treatment of Experimental Data*, Mc Graw Hill Book Company, New York, 1962.

$$P_{N,p}(n) \cong p^n (1-p)^N \frac{N^n}{n!} = \frac{(Np)^n (1-p)^N}{n!} \quad (14)$$

N'yi yok etmek için $a = Np$ kısaltmasını yaparsak;

$$P_a(n) \cong \frac{a^n (1-p)^{a/p}}{n!} = \frac{a^n}{n!} \left[(1-p)^{1/p} \right]^a \quad (15)$$

olur. Geriye kalan iş aşağıdaki

$$\lim_{p \rightarrow 0} (1-p)^{1/p}$$

limitini hesaplamaktır: Bu limit bütün analiz giriş kitaplarında incelenmekte ve değerinin, e doğal logaritma tabanı olmak üzere $1/e$ 'ye eşit olduğu gösterilmektedir. Sonuçta **Poisson dağılımı** denen

$$P_a(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!} \quad (16)$$

bağıntısını elde ederiz. Bu ifadede asıl binom dağılımının belirtgin N ve p sabitleri yerine bir tek a sabiti gelmektedir. Bu farkın nedeni binom dağılımının Np çarpımı sonlu kalacak şekilde $N \rightarrow \infty$ 'a ve $p \rightarrow 0$ 'a giderken limitini almış olmamızdır.

Poisson dağılımının elde ediliş şekline bakarak, olay sayısının çok büyük ve bir olayın kazanma olasılığının çok küçük olduğu, böylece $a = Np$ çarpımının sonlu kaldığı durumlara uyan dağılımın bu olduğu bilinmelidir. Poisson dağılımının en genel uygulama yerlerinden biri radyoaktivitenin anlatımıdır. Elimizde herbirinin belli bir zaman aralığında bozunma olasılığı 10^{-19} olan 10^{20} tane radyoaktif çekirdek bulunabilir. Bu zaman aralığındaki toplam parçalanma sayısı $N = 10^{20}$, $p = 10^{-19}$ ve $a = 10$ olmak üzere Poisson dağılımı gösterir. Poisson dağılımı için n ortalama değerini ve variansı, binom dağılımında bunlara uyan Denk (10) ile (11)'de verilen niceliklerden dolaysız olarak hemen hesaplayabiliriz. q bire çok yakın olduğundan a parametresi cinsinden aşağıdaki basit sonuçları buluruz.

$$\bar{n} = a \quad \sigma^2 = a \quad (17)$$

DENEY

1. Deney 4 için hazırlanan gelişigüzel sayılar çizelgesi binom ve Poisson dağılımları için ilginç örnekler verir. Yirmi yüzlü zar ile elde edilen **üç-rakamlı** gelişigüzel sayıları alarak her üç gruptaki 7'lerin sayısı için bir frekans sayımı yapın. Yani, üç rakamlı sayılardan kaç tanesinde hiç 7 yoktur; bir tane 7, iki 7 veya üç 7 kaç tanesinde var? Sonuçlarınızı ana binom dağılımına göre beklediklerinizle karşılaştırın. Örnek ortalamasını ve variansı hesaplayıp ana binom dağılımındaki değerlerle karşılaştırın.

2. Şimdi de gelişigüzel sayılar çizelgesindeki **dokuz rakamlı** grupları alalım. 9 rakamlı karesel grupların her birindeki 7'lerin sayısı için frekans sayımı yapın; çizelgede böyle 40 grup bulunmaktadır. Sonuçlarınızı **Çizelge 1** ' e geçirin.

Bütün rakamların frekans sayımını elde etmek üzere bu sayımları öteki rakamlar içinde tekrarlayın ve frekansları her satıra yazın. Son olarak, olasılıkları elde etmek için bunları toplam ölçme sayısına bölün (ölçme sayısı 40'dır. Neden?) .

Sonuçlarınızı $P_{N,1/10}(n)$ binom dağılımı değerleriyle karşılaştırın. Bu dağılımın değerlerini hesaplarken $P(n+1)$ 'i $P(n)$ cinsinden veren bir geri götürme (recurrence) bağıntısı kullanmak fazla işlem yapmayı engeller.

ÇİZELGE 1

Sayı	Frekans [F(n)]									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Binom dağılımı için uygun olan geri götürme bağıntısı Denk.(7)'nin doğrudan uygulanmasıyla sınavabileceğimiz aşağıdaki bağıntıdır.

$$P_{N,p}(N+1) = \frac{p(N-n)}{q(n+1)} P_{N,p}(n) \quad (18)$$

Buna göre sadece $P_{N,p}(0)$ 'ı hesaplamak ve bu bağıntıyı kullanmak yeterlidir. Geri götürme bağıntısını kullanırken başta yapılan bir hata süre gideceğinden genel olarak bu yol biraz sakıncalıdır. Bununla birlikte bu özel durumda artan n'ler için P'nin değerleri çok çabuk küçüldüğünden bir sakınca yoktur. Gerçekten, $n > 4$ için değerlerin 10^{-5} 'ten küçük olduğunu böylece daha ileri gitmenin anlamsızlığını görmelisiniz.

3. Şimdi 9 rakamlı gelişigüzel sayı gruplarındaki sayıların dağılımı için Poisson yaklaşıklığını ele alalım. $N = 9$, $p = 1/10$ olup $a = Np = 0,9$ 'dur. Poisson dağılımını kullanarak n 'nin 0'dan 9'a kadar olan değerleri için olasılıkları yeniden hesaplayın. Hiç kuşkusuz $N = 9$, $N = \infty$ 'dan çok uzak olduğundan kesin bir uyuşma beklememeliyiz, fakat yine de karşılaştırma ilgi çekicidir. Binom dağılımı $n = 0$ ve $n = 1$ için (N ve p 'nin özel değerlerinin sonucu olarak) aynı değerler verirken Poisson dağılımının $P(0)$ ve $P(1)$ için bunlardan sıra ile %5 daha büyük ve daha küçük değerler verdiğine özellikle dikkat edin. Daha büyük n 'ler için yaklaşıklığın doğruluğu artıyor mu, yoksa azalıyor mu?

SORULAR

1. Denk (18)'de verilen geri götürme (recurrence) bağıntısını çıkarınız.
2. Poisson dağılımı için aşağıda verilen geri götürme bağıntısını çıkarınız.

$$P_a(n+1) = \frac{a}{n+1} P_a(n)$$

3. Çok sayıda yumurtadan % 1'i çürük çıkıyor. Bunlardan seçilmiş gelişigüzel bir düzine yumurtadan **hiçbirinin** çürük çıkmama, birinin ve birden fazlasının çürük çıkma olasılığı nedir?
4. Bir Pazar günü öğleden sonra gezinti için dışarıya çıkan bir adam aşağıdaki oyunu oynuyor. Hareket noktasını da içine alan her köşe başında yazı-tura atıyor. Yazı gelirse kuzeye, tura gelirse güneye bir öteki köşeye kadar yürüyor. N atıştan sonra başlangıç noktasına olan uzaklıkların olasılık dağılımını bulunuz. Adam bu oyunu birkaç Pazar oynadığına göre N atıştan sonra başlangıca olan ortalama uzaklığı hesaplayın. Bu ortalama değer N ile nasıl değişir?
5. Doğan bebek sayısının Poisson dağılımına uyduğunu ve ikiz doğma olasılığının $1/100$ olduğunu kabul edelim. Beşiz doğma olasılığını bulunuz.

NORMAL DAĞILIM

GİRİŞ

Normal veya Gauss dağılımı, Binom dağılımının N büyürken p'nin sonlu kaldığı limit halidir. (N büyürken p'nin küçülüp Np çarpımının sonlu kaldığı Poisson dağılımından bu şekilde ayrı düşmektedir.) Gauss dağılımı özellikle deneysel fizikçiler için büyük önem taşır; çeşitli ölçümlerde yapılan gelişigüzel hataların dağılımı Gauss dağılımı ile tanımlanır. Tek tek hatalar bu dağılıma uymasa bile, bu hata gruplarının ortalamaları özellikle çok büyük gruplar için Gauss dağılımına uyar. Gelişigüzel hatalar ortalama değer etrafında (+) ve (-) olarak eşit olasılıkta görüldüklerinden Gauss dağılımı, Binom dağılımının özel bir hali olarak düşünülebilir.

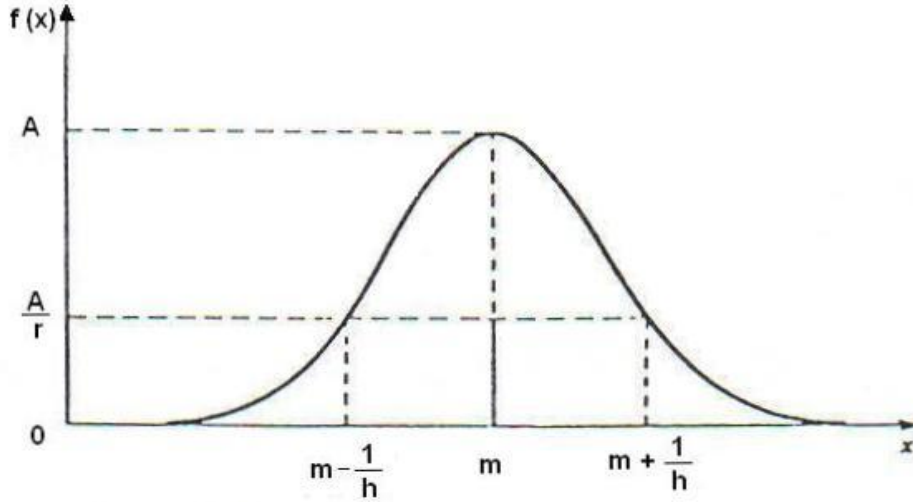
KURAMSAL BİLGİ

Gauss dağılımının matematiksel ispatından ziyade, deneyçiler için, deneysel ölçümlerdeki gelişigüzel hataların bu dağılıma uyması önemlidir. Bu özelliği nedeniyle bu dağılım bazen *normal hata fonksiyonu* (*normal error function*) olarak anılır ve Gauss dağılımına uyan hatalara da *normal dağılımlı* (*normally distributed*) denir. Gauss dağılımı;

$$f(x) = Ae^{-h^2(x-m)^2} \quad (1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada A,h ve m sabitlerdir. x bir ölçümden elde edilen değer olup, sürekli bir değişkendir. Binom ve Poisson dağılımlarında ise bu bir tam sayıdır.

Şekil 1 bu dağılım fonksiyonunun grafiğini göstermektedir.

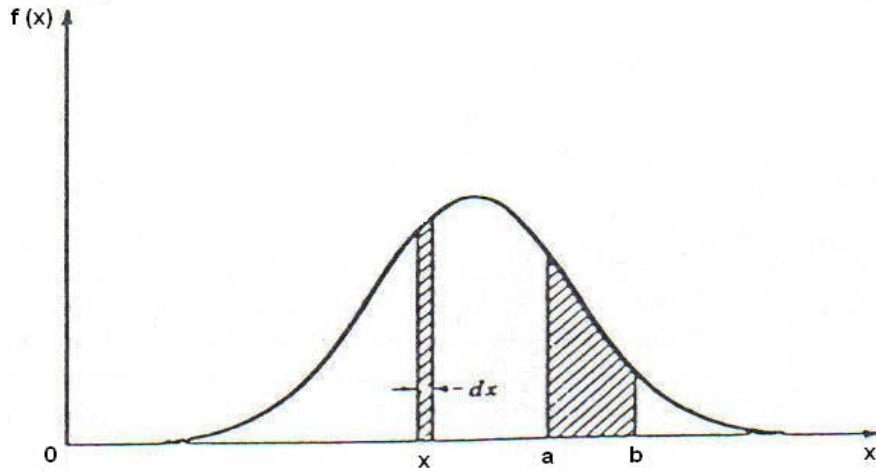


Şekil 1. Gauss dağılım fonksiyonu

h parametresi, çan eğrisinin genişliği ile ilgili bir parametredir. dx çok küçük bir aralık olmak koşulu ile, $f(x)dx$ ölçme sonunda elde edilen bir değer x ile $x + dx$ arasında bulunma olasılığını verir. Bu ifadenin basit grafiksel yorumu Şekil 2'de görülmektedir. $f(x)dx$ aslında eğrinin altında dx genişliğinde taralı olan alandır. Benzer şekilde ölçülen niceliğin $a \leq x \leq b$ aralığında bulunma olasılığı

$$P(a,b) = \int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

olacaktır. Bir ölçme sonucunun herhangi bir yere düşmesinin toplam olasılığı 1' dir, buna göre $f(x)$ eğrisinin altında kalan toplam alan 1 olmalıdır.



Şekil 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (3)$$

Buna normalizasyon koşulu denir. Bu koşuldan yararlanarak A,h ve m sabitleri üzerindeki sınırlamalar bulunabilir.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-h^2(x-m)^2} dx = 1 \quad (4)$$

$$h(x-m) = z \quad (5)$$

alınırsa;

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = 1 \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \quad (7)$$

olduğundan;

$$A = 1 / \sqrt{\pi} \quad (8)$$

elde edilir. Böylece Gauss dağılımı;

$$f(x) = (h / \sqrt{\pi}) e^{-h^2 (x - m)^2} \quad (9)$$

olur.

Çok sayıdaki ölçme sonucunda elde edilen x değerlerinin ortalaması, $\bar{x}$, bu dağılım fonksiyonu için hesaplanırsa;

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (10)$$

$$\bar{x} = h / \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-h^2 (x - m)^2} dx \quad (11)$$

bulunur.

(5) deki z kullanılırsa;

$$\bar{x} = 1 / \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (z / h + m) e^{-z^2} dz \quad (12)$$

elde edilir. Birinci integral terimi, z'nin negatif ve pozitif değerlerinin birbirini götürmesi nedeni ile sıfır olur. Bu durumda ortalama değer,

$$\bar{x} = m / \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = (m / \sqrt{\pi}) \sqrt{\pi} \quad (13)$$

elde edilir.

Benzer şekilde varyans hesaplanabilir.

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx \quad (14)$$

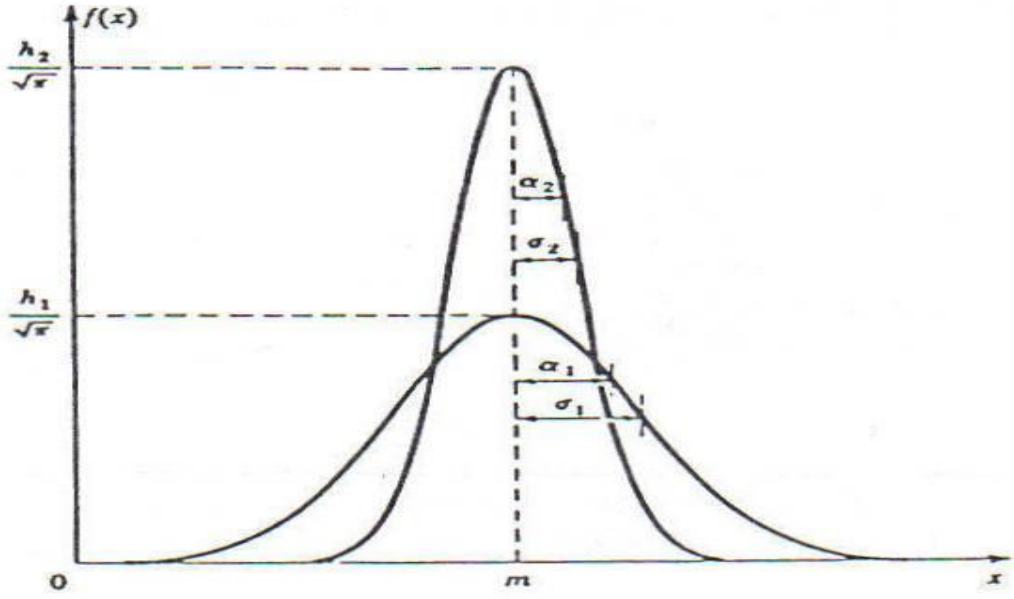
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 (h / \sqrt{\pi}) e^{-h^2 (x - m)^2} dx \quad (15)$$

İntegralin alınması ile,

$$\sigma^2 = 1 / (2h^2) \quad \text{veya} \quad \sigma = 1 / \sqrt{2} h \quad (16)$$

varyans ve standart sapma elde edilir.

Şekil 3 ' den görüldüğü gibi, h büyüdükçe, daha keskin bir eğri elde edilir ve buna göre, h dağılımın hassasiyetinin ölçüsü olarak tanımlanabilir.

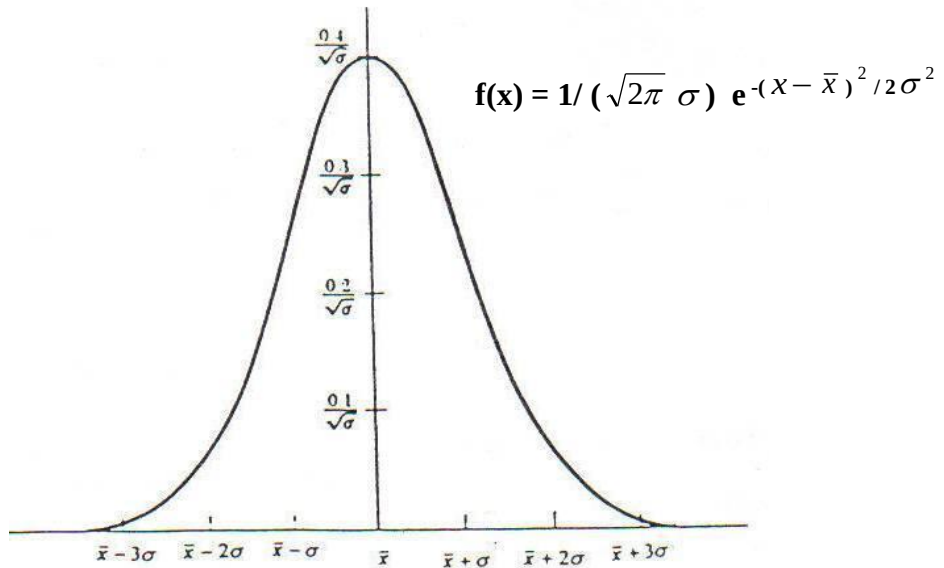


Şekil 3.
Gauss dağılım fonksiyonunun son şekli

$$f(x) = 1/(\sqrt{2\pi} \sigma) e^{-(x - \bar{x})^2 / 2\sigma^2} \quad (17)$$

olarak yazılabilir.

Bu fonksiyonun tanımladığı eğri, $x = \bar{x}$ çevresinde simetriktir ve σ her zaman dağılımın genişliğini verir. Eğri $x = \bar{x} \pm \sigma$ değerlerinde $x = \bar{x}$ deki büyük değerinin $e^{-1/2}$ 'sine düşer. Şekil 4, Denklem (17) nin grafiksel gösterimidir.



Şekil 4.

DENEY

- Ölçülen herhangi bir niceliğini a,b aralığında bulunma olasılığı (2) bağıntısı ile $P(a,b) = \int_a^b f(x) dx$ olarak verilmişti. Buna göre; x'in $x \pm \sigma$ sınırları arasındaki herhangi bir değeri alma olasılığını
$$P(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) = 1/(\sqrt{2\pi} \sigma) \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} dx$$
 bağıntısına göre hesaplayın..
- Benzer şekilde x'in $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$ ve $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$ arasına düşme olasılığını bulun.
- Gelişigüzel sayılar çizelgenizdeki 360 sayı içerisinde 0 ile 9 arasındaki her rakamın kaç kez geldiğini sayarak bir tablo hazırlayın ve her rakamın $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ aralığına düşüp düşmediğini belirleyin.
- 360 sayılı tablonuzdaki tek ve çift rakamları sayın . % 95 ve % 65 ' lik bölgelerin sınırlarını belirleyerek tek-çift dağılımının hangi bölgede olduğunu bulun.
- Bir metal parayı 100 kez atarak yazı ile tura gelme sayılarını kaydedin. Bu değer, hangi dağılım bölgesinin içinde olduğunu bularak paranın eğilimli olup olmadığını yorumlayın.

SORULAR

- Bir deneyde ölçme sonuçlarının Gauss dağılımına uyduğunu varsayarak, alınan ölçümlerin ortalama değer etrafında $\pm 1/2\sigma$ aralığına düşme olasılığını hesaplayınız.
- Bir sınavda alınan notlar 76 ortalama ve 15 standart sapma ile normal dağılım göstermektedir. Öğrencilerin % 15'i A, ve % 10'u F notu almıştır.
 - A alabilmek için en düşük notu,
 - Geçebilmek için en düşük notu bulunuz.
- Bir civalı manometrede civa sütununun yüksekliği (h) 10 kez ölçülmüş ve aşağıdaki veriler elde edilmiştir.

Ölçme no.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h(cm)	55.06	54.92	55.01	55.00	54.98	54.99	55.02	55.03	55.02	54.97

Bu verilerin $\bar{h} = 55.00$ cm ortalamaya sahip bir Gauss dağılımına uyduğu bilindiğine göre; bundan sonra yapılacak iki ölçme sonucunun (54.98 – 55.02) cm aralığına düşme olasılığını hesaplayın.

KAYNAKLAR

1. Statistical Treatment of Experimental Data, Hugh D. Young, McGraw-Hill Comp., 1963
2. Berkeley Physics Laboratory, Alan M. Portis, Hugh D. Young, McGraw-Hill Comp., 1971
3. An Introduction to Probability Theory and Its Applications (Vol 1), Feller W., 1968
4. İstatistik Fizik, Dr. Fevzi Apaydın, H. Ü. Yayınları, 1988

Normal Dağılım Tablosu

T	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990